ELECTROMAGNETISMO I

TEMA 1 : INTRODUCCIÓN

1. Enfoques para el desarrollo de un tema científico
   - Inductivo
   - Deductivo
2. Interacciones fundamentales
   - Gravitatoria
   - Electromagnética
   - Fuerza o interacción nuclear fuerte
   - Fuerza o interacción nuclear débil
   - Fuerza o interacción electrodébil

(*) En el estudio de campos vectoriales es conveniente representar gráficamente las variaciones de los campos mediante líneas de campo dirigidas, llamadas líneas de flujo. Son líneas o curvas dirigidas que indican en cada pto. la dirección del campo vectorial. La magnitud de un campo en un pto se representa o bien con la densidad o bien con la longitud de las líneas dirigidas en la vecindad del pto. Una divergencia neta positiva indica la presencia de una fuente de fluido en el interior del volumen, mientras que una divergencia neta negativa indica la presencia de un sumidero.

3. Análisis vectorial

derivadas espaciales de un campo vectorial

- Gradiente (→ derivadas espaciales de un campo escalar) → vector que representa la magnitud y la dirección de la razón de incremento espacial máximo de un escalar.

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \left(\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_n}\right) \quad ; \quad \text{grad } \phi = \nabla \phi$$

- Divergencia de un campo vectorial $\vec{F}$ diferente de cero solamente en los ptos. donde "nacen" o "mueren" las líneas de campo. (*) → $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ (campo solenoidal)

  ↳ $\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla}\vec{F}$ → $\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

- Rotacional es diferente de cero solo en los ptos. rodeados por líneas de campo cerradas o en espiral → $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ (campo irrotacional).

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

→ Definición matemática independiente del sistema de coordenadas:
- Divergencia: $\nabla \vec{F} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$
- Rotacional: $\nabla \times \vec{F} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S}\left[\vec{n} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}\right]$

→ La circulación neta de un campo vectorial alrededor de una trayectoria cerrada se define como la integral del escalar o vector a lo largo de la trayec.

→ El rotacional de un campo vectorial $\vec{A}$, denotado por $\nabla \times \vec{A}$, es un vector cuya magnitud es la circulación neta máxima de $\vec{A}$ por unidad de área conforme el área tiende a cero y cuya dirección es la de la normal al área cuando está orientada de manera que la circulación neta sea máxima.

• $\nabla \times (\nabla V) = 0$ → rotacional del gradiente de cualquier campo escalar es cero. ⇒ Si el rotacional de un campo vectorial es nulo, entonces el campo vectorial puede expresarse como el gradiente de un campo escalar. → Si $\nabla \times \vec{E} = 0$ ↙ $\vec{E} = -\nabla V$

• $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ → la divergencia del rotacional de cualquier campo vectorial es cero. ⇒ Si la div de un campo vectorial es nula, entonces el campo vectorial es solenoidal y puede expresarse como el rotacional de otro campo vectorial ⇒ $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ↙ $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

• Teorema del gradiente → $d\phi = \nabla \phi \cdot d\vec{l}$

• Teorema de la divergencia (Gauss) → $$\boxed{\int_V \operatorname{div} \vec{A} \cdot dv = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}}$$

$d\vec{S}$ → dirección normal hacia el exterior, ⊥ a S y dirigida hacia fuera del volumen

La integral de volumen de la divergencia de un campo vectorial es igual al flujo de salida total del vector a través de la superficie que limita el volumen.

Convierte una integral de volumen de la div de un vector en una integral de superficie cerrada del vector y viceversa

• Teorema de Stokes (o del rotacional) → $$\boxed{\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A})\, d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}}$$

→ La integral de superficie del rotacional de un campo vectorial sobre una superficie abierta es igual a la integral de línea cerrada del vector a lo largo del contorno que delimita la superficie.

Convierte una integral de superficie del rotacional de un vector en una integral de línea del vector y viceversa

→ Si aplicamos la integral de superficie de $\nabla \times \vec{A}$ a una superficie cerrada → no habrá contorno externo que delimite la superficie → $\oint_S \nabla \times \vec{A}\, d\vec{s} = 0$

4. Teorema de Helmholtz

Establece que si se conoce la divergencia y el rotacional de un campo vectorial en todos los ptos. de una región finita, y, este campo puede ser calculado de forma única. → un campo vectorial está unívocamente determinado si su divergencia y su rotacional están especificados en todos los ptos. de una región finita.

Por lo que $\vec{F}$ puede calcularse a partir de: $\boxed{\vec{F} = \vec{F}(r) = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{A}}$

→ Si $\vec{\nabla}\vec{F} = 0$ → solenoidal ⇒ $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

→ Si $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ → irrotacional ⇒ $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$

- Solenoidal e irrotacional → $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, $\nabla \times \vec{F} = 0$
- Solenoidal pero no irrotacional → $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, $\nabla \times \vec{F} \neq 0$
- No solenoidal pero irrotacional → $\nabla \cdot \vec{F} \neq 0$, $\nabla \times \vec{F} = 0$
- Ni solenoidal ni irrotacional → $\nabla \cdot \vec{F} \neq 0$, $\nabla \times \vec{F} \neq 0$

| TEMA 2 | : ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

1. Distribuciones de carga y de corriente

• Carga del electrón → $e^- = -1'602 \cdot 10^{-19}$ C

• Densidad de carga volumétrica: cociente entre la cantidad de carga que hay en él y dicho volumen → $\boxed{\rho_v = \dfrac{\Delta q}{\Delta v}}$ → $\rho_v = \lim_{\Delta v \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta v} = \dfrac{dq}{dv}$

• Densidad superficial de carga → $\rho_s = \lim_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta s} = \dfrac{dq}{ds}$; • Densidad lineal de carga → $\rho_l = \lim_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta l} = \dfrac{dq}{dl}$

Y, en un volumen V, para una densidad de carga ρ_v, tenemos: $q=\int_V \rho_v \cdot dv$, análogamente para distribuciones superficiales y lineales: $q=\int_S \rho_s dS$; $q=\int_C \rho_\ell \, dl$

- Integral de línea: integración (I) de una función escalar, $V(\vec{r})$ a lo largo de una curva C:

$$I=\int_a^b V(\vec{r})\cdot dl=\int_C V(\vec{r})\cdot dl$$

- Integral de superficie: de una función escalar, $V(\vec{r})$, en una superficie S:

$$I=\int_S V(\vec{r})dS$$

- Integral de volumen: de una función escalar, $V(\vec{r})$, en un volumen V:

$$I=\int_V V(\vec{r})dV$$

- Campo creado por una distribución continua:

$$\vec{E}(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_v}{R^2} dv/ds/dl$$

- Campo electrostático creado por N cargas puntuales:

$$\vec{E}(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|\vec{R_i}|^3}\vec{R_i}$$

2. Campos eléctricos estáticos

La intensidad de campo eléctrico $\vec{E}$ es igual a la fuerza que experimenta una carga de prueba muy pequeña estacionaria al colocarla en una región donde no existe un campo: $\left[\vec{E}=\lim_{q\to 0}\frac{\vec{F}}{q}\ (N/C,\ V/m)\right]$ donde q es lo suficientemente pequeña como para no perturbar la distribución de carga de la fuente

La fuerza sobre una carga estacionaria q en un plano $\vec{E}$: $\left[\vec{F}=q\cdot\vec{E}\right]$

Los dos postulados básicos de la electrostática en el espacio libre son los siguientes:

- $\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$ → campo eléctrico estático no va a ser solenoidal a no ser que $\rho_v=0$
- $\nabla\times\vec{E}=0$ (campo irrotacional) → Los campos eléctricos son irrotacionales

$\varepsilon_0=8{,}854\cdot10^{-12}$ F/m

↑ permitividad del espacio libre

2.1. Ley de Gauss

Integrando la ecuación de la divergencia del campo electrostático

$$\int_V \nabla\vec{E}\cdot dv=\int\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}dv \xrightarrow[\text{Th. divergencia}]{} \oint\vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{\int\rho_v dv}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{\oint\vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{Q}{\varepsilon_0}} \rightarrow \text{Teorema o Ley de Gauss}$$

$\oint_C\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$ → la integral de línea escalar de la intensidad de campo eléctrico estático a lo largo de una trayectoria cerrada es nula.

el signo − es para estar de acuerdo con el convenio de que el potencial eléctrico V aumenta al ir en contra del campo $\vec{E}$

2.2. Potencial escalar

De ambos postulados básicos de la electrostática, y del Th. de Helmholtz, se deduce que el campo $\vec{E}$ puede calcularse como el gradiente de un potencial escalar, denominado potencial eléctrico: $\vec{E} = -\nabla\phi + \cancel{\nabla \times \vec{A}} = -\nabla\phi$

por ser irrotacional

↳ $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho_v dv}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$, análogamente para distribuciones lineales y superficiales de carga.

Si tenemos un conjunto de N cargas discretas: $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{q_k}{|\vec{r}-\vec{r}_k'|}$

De manera análoga, retomando los postulados básicos, obtenemos:

$\nabla\cdot\nabla\phi = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$; y la divergencia de un gradiente en coordenadas rectangulares puede escribirse como: $\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)}_{\text{operador laplaciano en coord. rectangulares}}\phi = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$

Se trata de una nueva ecuación diferencial que relaciona la variación de trabajo o potencial en cada pto. con la densidad de carga en ese pto., se conoce como ecuación de Poisson:

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = \frac{-\rho_v}{\varepsilon_0}$$

En la mayoría de los ptos. no existe carga, por lo que: $\nabla^2\phi(\vec{r}) = 0$, y esta ecuación se conoce como ecuación de Laplace (ecuación para las regiones libres de carga).

En general, será más fácil calcular $\vec{E}$ a través del gradiente de potencial que integrando directamente las fuentes.

La variación de potencial se define generalmente como el trabajo que hay que hacer contra el campo (~~pto~~) para trasladar una carga eléctrica unidad desde un pto. a otro: $\boxed{\Delta V_1^2 = V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}}$ (V)

↳ equivalente al trabajo efectuado al mover una unidad de carga de P_1 a P_2.

La definición de potencial en un pto. requiere tomar otro como referencia, generalmente tomamos el infinito como referencia de potenciales y se le asigna el valor cero.
Con esta referencia, el potencial en un pto. es el trabajo para llevar una carga desde el infinito a dicho pto.

$$\left[\Delta V = \frac{W}{q} = -\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}\right]$$

→ por qué debe ser independiente de la trayectoria? ⇒ apuntes Paco

Dado que el campo electrostático es conservativo, $\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}$ es independiente de la trayectoria, lo que nos proporciona un valor fijo del potencial.

Realmente esto viene de:

$$\frac{W}{q} = -\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_1^2 \nabla\phi\, dl = +\int_1^2 d\phi = \phi_2 - \phi_1 = V_2 - V_1 = \Delta V$$

Es importante señalar que el potencial eléctrico aumenta al ir en contra del campo eléctrico. La dirección de $\nabla\phi$ (ó ∇V) es normal a las superficies con V cte.. Las líneas de campo siempre serán perpendiculares a las líneas equipotenciales y a las superficies equipotenciales.

A continuación presentamos los potenciales debido a diversas distribuciones teniendo en cuenta que $\vec{E} = -\nabla\phi$.

Potencial debido a una carga puntual → $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r}$

Potencial debido a un sistema de cargas puntuales → $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|r - r_i|}$

Potencial debido a distribuciones continuas de carga → $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_v\, dv}{|r - r'|}$

⟶

• Potencial y campo creado por un dipolo eléctrico en un pto. arbitrario P, a una distancia $R >> d$: → Ver anexo

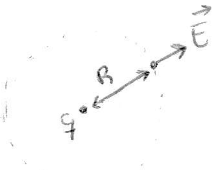
Teniendo en cuenta que: $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right)$; $d << R \Rightarrow R_+ \cong R - \frac{d}{2}\cos\theta$;

$R_- \cong R + \frac{d}{2}\cos\theta \Rightarrow$ sustituyendo y simplificando obtenemos; $V = \frac{\hat{R}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R^2}$

↳ $\left[\vec{p} = q\vec{d}\right]$ (C·m) → momento dipolar eléctrico

3. Ley de Coulomb

Consideremos el problema electrostático más simple, una sola carga puntual q, en reposo en el espacio libre.



Considerando la Ley de Gauss y estableciendo como superficie gaussiana una esfera de radio R (distancia entre la carga y el pto.):

puesto que una carga puntual no tiene direcciones preferentes

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2}\hat{R}$. El campo $\vec{E}$ debe ser radial y tener la misma intensidad en todos los ptos. de la sup. esférica, $\vec{E} = E_R(R)\hat{R}$

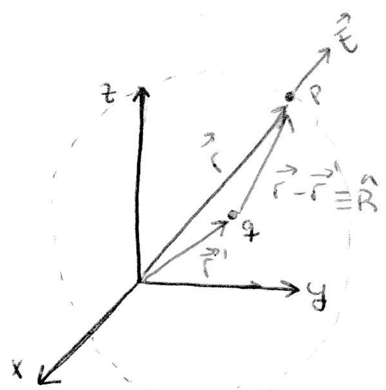
La intensidad de campo eléctrico de una carga puntual tiene dirección radial hacia afuera, magnitud proporcional a q e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la carga.

Si la carga q no está situada en el origen de coordenadas la situación sería la siguiente:

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\hat{R} \ (V/m)$$

$$\hat{R} = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$ → vector unitario trazado de q a p.

$$\vec{E}_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \ (V/m)$$



Cuando se coloca una carga puntual q' bajo el efecto del campo creado por la carga q: $\left[\vec{F}_{qq'} = q'\vec{E}_1 = \frac{q_2 \cdot q_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}\hat{r}\right]$ (N) → fuerza matemática de la ley de Coolomb → la fuerza entre 2 cargas puntuales es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

Si $q_1 \cdot q_2 > 0 \rightarrow \vec{F}_{qq'}$ es una fuerza de repulsión

Si $q_1 \cdot q_2 < 0 \rightarrow \vec{F}_{qq'}$ es una fuerza de atracción

En caso de un sistema de N cargas discretas → $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{q_k(\vec{r}-\vec{r}_k')}{|\vec{r}-\vec{r}_k'|^3}$ (V/m)

Para una distribución continua de carga, el campo eléctrico viene dado por las siguientes expresiones, según el tipo de distribución:

- Distribución volumétrica → $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho_v}{R^2}\hat{R}\,dv'$ (V/m)
- Distribución superficial → $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\rho_s}{R^2}\hat{R}\,ds'$ (V/m)
- Distribución lineal → $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l'}\frac{\rho_l}{R^2}\hat{R}\,dl'$ (V/m)

En todos los casos → $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ → representa la distancia del pto. fuente y el pto. campo.

Postulados de la electrostática en el espacio libre:

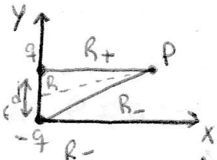
- Forma diferencial
  - $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$
  - $\nabla \times \vec{E} = 0$
- Forma integral
  - $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$
  - $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

- **Anexo**: Campo y potencial creado por un dipolo

sentido de $-q$ a q

Definimos dipolo eléctrico como un sistema formado por 2 cargas q y q', separadas una distancia d, en el cual el momento dipolar se mantiene cte. ($\vec{p} = q\vec{d}$)

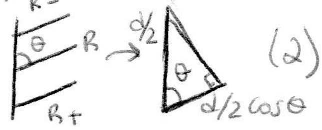
Calcularemos el potencial y el campo creado por dicho dipolo a una distancia $R \gg d$ en un pto. P. (1)



(1)

Teniendo en cuenta el sistema representado, el potencial

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_+} + \frac{(-q)}{R_-}\right) \rightarrow V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right)$$



(2)

Dado que consideraremos $R \gg d$, podemos considerar R, R_+ y R_- prácticamente paralelos entre sí, con lo que: $R_+ = R - d/2 \cos\theta$; $R_- = R + d/2 \cos\theta$ (2); y sustituyendo estas nuevas relaciones en la expresión anterior del potencial, y simplificando donde corresponda obtenemos:

$$\boxed{V(P) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}} \ (V) \quad (R = r)$$

Además, sabemos que $\vec{E} = -\text{grad}\, V = -\nabla V$. El gradiente en coordenadas cilíndricas:

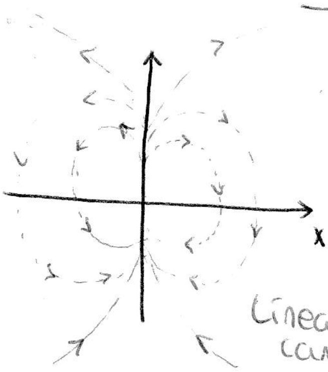
$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{\theta} \longrightarrow \vec{E} = \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial r}}_{E_r}\hat{r} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\right)}_{E_\theta}\hat{\theta}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}_r &= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p\cos\theta}{r^3}\hat{r} \\ \vec{E}_\theta &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p\,\text{sen}\,\theta}{r^2}\cdot\frac{1}{r}\hat{\theta} \end{aligned}\right\} \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2p\cos\theta\,\hat{r} + p\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\theta}\right)$$

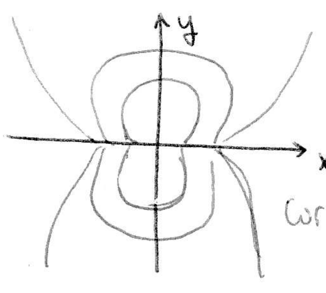
$$\boxed{\vec{E}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \text{sen}\,\theta\,\hat{\theta}\right)} \ (N/C)$$

Las superficies equipotenciales creadas por el dipolo se pueden calcular fácilmente $\rightarrow r^2 = \dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 V}$ $\rightarrow$ este r depende de V; por lo que para determinados voltajes, encontraremos una determinada sup. equipotencial definida por $r(V)$.

En cuanto a las líneas de campo: $r = K_d\, \text{sen}^2\theta \rightarrow K_d$ caracteriza a cada una de las líneas de campo.



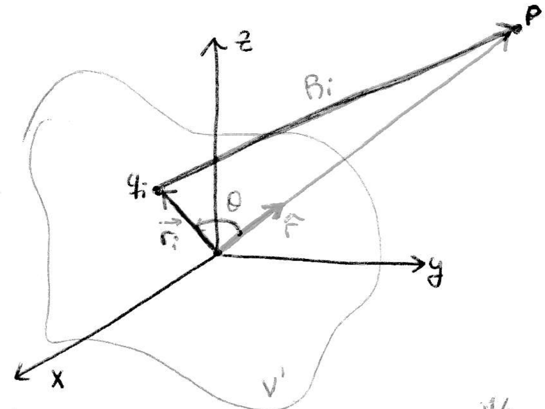
Líneas de campo



Curvas equipotenciales

• Anexo 2: Desarrollo multipolar del potencial escalar

→ Cálculo del potencial para ptos. alejados



Consideramos un sistema de N cargas puntuales $q_1, q_2, \dots, q_n$, localizadas en un volumen V'.

$\vec{r_i}$ ≡ vectores posición de las cargas
$\vec{r}$ ≡ vector posición de P.

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i}$$

Si introducimos ahora el ángulo θ, mediante el th. del coseno obtenemos que: $R_i = (r^2 + r_i^2 - 2rr_i\cos\theta_i)^{1/2}$; como el pto. P se encuentra muy alejado de V', podemos hacer la siguiente aproximación: $r > r_i \; \forall r_i \rightarrow \frac{r_i}{r} < 1$

Desarrollando en serie de potencias:

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{(r^2+r_i^2-2rr_i\cos\theta_i)^{1/2}} = \frac{1/r}{\frac{1}{r}(r^2+r_i^2-2rr_i\cos\theta_i)^{1/2}} = \frac{1}{r\left(1+\underbrace{\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 - \frac{2r_i}{r}\cos\theta_i}_{\ell}\right)^{1/2}} = \frac{1}{r(1+\ell)^{1/2}} \Rightarrow$$

Desarrollando $(1+\ell)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\ell + \frac{3}{8}\ell^2 - \frac{5}{16}\ell^3 + \dots$ y sustituyendo ℓ, y manteniendo solo los términos del orden $(r_i/r)^2$

$$\rightarrow \frac{1}{(1+\ell)^{1/2}} \simeq 1 + \left(\frac{r_i}{r}\right)\cos\theta_i + \frac{1}{2}\left(\frac{r_i}{r}\right)^2(3\cos^2\theta_i - 1)$$

Dividiendo entre r y sustituyendo en la ecuación del potencial:

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{i=1}^{N} q_i}_{\text{Término monopolar}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum_{n=1}^{N} q_i r_i \cos\theta_i}_{\text{Término dipolar}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i r_i^2}{2}(3\cos^2\theta_i - 1)}_{\text{Término cuadripolar}} + \dots}$$

En general podemos escribir el potencial como:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{r^{\ell+1}}\left[\sum_{i=1}^{N} q_i r_i^{\ell} \cdot P_\ell \cos\theta_i\right]$$

→ Esas funciones con dependencia en θ_i, se conocen como polinomios de Legendre

(*) Podemos observar que la dependencia con la distancia r del pto. campo varía como $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$ y $\frac{1}{r^3}$, y así sucesivamente, de tal forma que a medida que uno se aleja de la distribución, los términos de mayor orden del desarrollo se hacen cada vez menos importantes.

→ Término monopolar

→ el término monopolar es el término dominante del potencial. Cuando el pto. P se encuentra muy alejado de las cargas se observa que la distribución actúa como una carga puntual: $\phi_M(\vec{r}) = \frac{Q_T}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$$\phi_M(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\underbrace{\sum_{i=1}^{r} q_i}_{Q_{TOTAL}}$$

→ Término dipolar

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} q_i r_i \cos\theta_i}_{} = \ldots = \frac{\vec{p}\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}?$$

$\vec{r}$ → solo depende de la posición del pto. campo

$\vec{p}$ → solo depende de la distribución de carga

no depende de la posición del pto. campo, solo de la distribución de carga

→ definiendo el momento dipolar $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i \vec{r}_i$

Si el pto. campo P se encuentra muy alejado, y si el momento monopolar se anula, entonces $\phi_D(\vec{r})$ será el término más importante en el desarrollo del potencial, y el momento dipolar $\vec{P}$ será la característica dominante.

→ Término cuadripolar

$$\phi_Q(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i \cdot r_i^2}{2} (3\cos^2\theta_i - 1)}_{}$$

tensor momento cuadripolar: cada término de este desarrollo es un producto de dos cantidades, la 1ª depende solo de la posición y del pto. campo, y la otra de la distribución de carga.

Si el pto. P se encuentra muy alejado, y si tanto el momento monopolar Q, y el momento dipolar $\vec{P}$ son nulos, el tensor momento cuadripolar es dominante en la distribución.

→ El momento monopolar Q solo depende de la distribución de carga; sin embargo, tanto el momento dipolar $\vec{P}$ como el cuadripolar dependen de la distribución de carga y de la elección del origen. → bajo ciertas circunstancias será independientes de esta elección.

TEMA 3: ELECTROSTÁTICA EN MEDIOS MATERIALES

1. Conductores en un campo electrostático

• **Conductor**: "región" en las que las cargas son libres de moverse bajo la influencia de un campo eléctrico.

dado que tratamos cargas en posiciones de equilibrio (fijas en el espacio) → interior nulo y potencial cte.

Por lo que:

→ Dentro del conductor
$$\begin{cases} \bullet\ \vec{E}(\vec{r}) = 0 \\ \bullet\ \phi(\vec{r}) = V(\vec{r}) = \text{cte.} \end{cases}$$
• $\rho_v = 0$ → no hay cargas libres en el interior del conductor

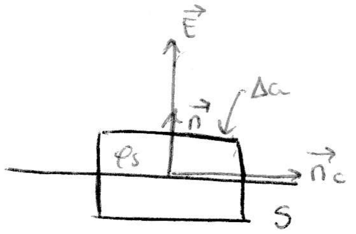
→ En la superficie
$$\begin{cases} \vec{E}_n(\vec{r}) \neq 0 \\ E_t(\vec{r}) = 0 \end{cases}$$
$\phi(\vec{r}) = \text{cte.}$

En la superficie, si $\vec{E}_t \neq 0$, supondría la existencia de una fuerza tangencial sobre las cargas móviles, que produciría un movimiento de cargas paralelamente a la superficie, por lo que en la superficie de un conductor, $\vec{E}$ debe ser normal a la superficie.

↳ La superficie de un conductor es una sup. equipotencial en condiciones estáticas

Si aplicamos el Th. de Gauss a una superficie arbitraria, cerrada, dentro del conductor → $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{Q_{enc} = 0}$, dado que $\vec{E} = 0$ dentro del conductor. La carga encerrada seguirá siendo nula en todos los ptos. interiores del conductor. → La carga neta presente en un conductor debe localizarse en su superficie.

• **Campo electrostático en la superficie de un conductor**



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{tapa} (\vec{E}\cdot\vec{n})(ds\,\vec{n}) + \cancelto{0}{\int_{lat} \vec{E}\cdot\vec{n}_c\, ds} + \cancelto{0}{\int_{fondo} \vec{E}\cdot d\vec{s}} = E\Delta a$$

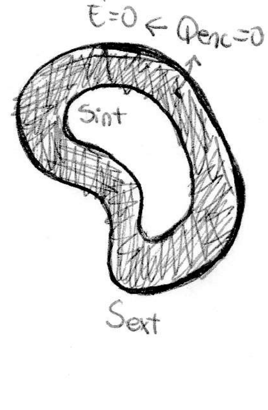
$\vec{E} \perp \vec{n}_c$

↳ $Q_{enc} = \rho_s \Delta a$

$$\rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = E\cancel{\Delta a} = \frac{\rho_s \cancel{\Delta a}}{\varepsilon_0};\quad E_{sup} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{\vec{E}_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\vec{n}} \quad \boxed{\vec{E}_t = 0}$$

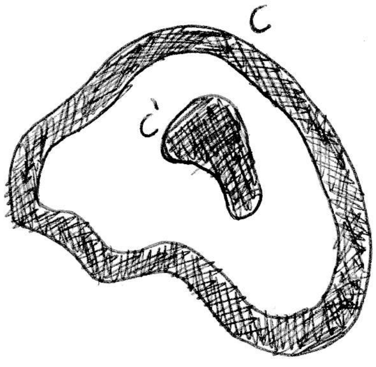
• **Conductor con una cavidad en su interior**

↳ ∄ Lidia mejor explicado



↳ Solo puede aparecer campo dentro de la cavidad S_{int}, y en el exterior del mismo (S_{ext}). → Consideramos inicialmente que el conductor está descargado. Colocamos una carga puntual en el centro. Para resolver el problema tenemos que seguir garantizando el equilibrio, entonces: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \xrightarrow{E=0} Q = 0$, por lo tanto debería aparecer en la superficie interna una carga $-q$. Pero esto no garantiza la neutralidad del conductor → la única manera es que ∃ una carga $+q$ en S_{ext} → $+q \rightarrow S_{ext}$, $-q \rightarrow S_{int}$, neutro

Si consideramos por tanto, un conductor con otro conductor en una cavidad.



Si C' (el conductor del interior) no posee carga, no existe campo dentro de la cavidad interior.

El conductor exterior C, actúa como una jaula de Faraday, blindando su interior. Por tanto, el conductor interno posee el mismo potencial que el potencial envolvente C.

Nota: las variaciones en el interior se propagan hacia el exterior, pero no al revés.

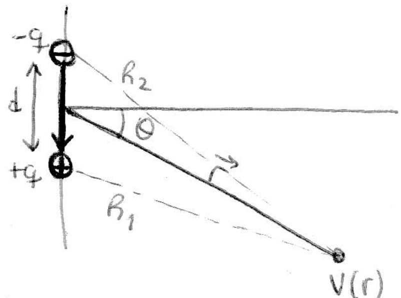
2. Dieléctricos en campos electrostático

→ Ya que los dipolos eléctricos tienen potencial eléctrico e intensidad de campo no nulos → los dipolos eléctricos inducidos modifican el campo eléctrico dentro y fuera del dieléctrico.

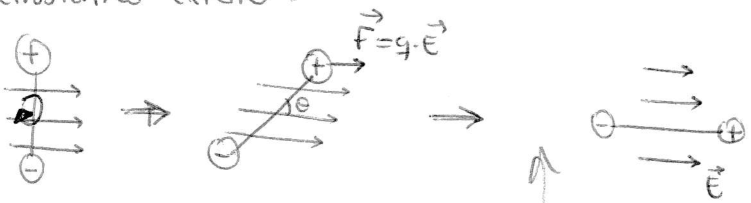
Los dieléctricos se diferencian de los conductores porque no tienen cargas libres que se puedan mover a través del material (al ser sometidos a un campo eléctrico). En los dieléctricos, todos los electrones están ligados, por lo que el único movimiento posible es un ligero desplazamiento de las cargas positivas y negativas en direcciones opuestas. → este desplazamiento es ínfimo comparado con las distancias atómicas.

Este desplazamiento de cargas es lo que denominamos polarización, y produce un momento dipolar inducido en las moléculas, y ocurre en presencia de $\vec{E}$. Estos nuevos dipolos provocan un campo eléctrico que se suma al provocado por las cargas externas.

Momento dipolar → $\vec{p} = q \cdot \vec{d}$ $(C \cdot m)$



Cuando sometemos un dipolo eléctrico a un campo electrostático exterior:



→ Gira hasta que $\vec{p}$ y $\vec{E}_{ext}$ se alinean en la misma dirección y sentido

Se produce un torque neto (giro) respecto al eje x (dirección del campo $\vec{E}$):

$$\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E} \quad ; \quad T = F d \operatorname{sen} \theta$$

Cuando no hay campo externo, los dipolos individuales de un dieléctrico están orientados de forma aleatoria y no producen un momento dipolar neto.

Cuando ∃ un campo eléctrico → éste ejercerá un par de torsión sobre los dipolos individuales de forma que tenderá a alinearlos con el campo

Al aplicar un campo externo $\vec{E}_{ext}$, a un dieléctrico polar, los dipolos individuales tienden a alinear su momento dipolar con dicho campo externo (polarización del dieléctrico).

Definimos $\vec{P}$ como el vector polarización:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} \vec{p}_k}{\Delta v} \quad (C/m^2) \quad , \text{ donde:}$$

$n \equiv$ nº de moléculas por unidad de volumen

$\vec{p}_k \equiv$ momentos dipolares inducidos

→ densidad de volumen del momento dipolar eléctrico

Cuando no hay campo externo $\vec{E}_{ext}$, los dipolos individuales de un dieléctrico polar están orientados de forma aleatoria y no producen un momento dipolar neto a nivel macroscópico.

Definimos la densidad superficial de carga de polarización equivalente como:

$$\boxed{\rho_{ps} = \vec{P}\hat{n}} \quad (C/m^2)$$

Para una superficie S que delimita un volumen V la carga neta que sale fuera del volumen como resultado de la polarización es: $Q = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{s}$;

La carga neta que permanece en el interior: $-Q = \int_V \rho_{pv} dv = -\oint_S \vec{P}\hat{n} ds \underset{\text{Th. divergencia}}{=} \int_V (-\nabla \vec{P}) dv$.

Y por definición tenemos: $-Q = \int_V \rho_{ps} dv$

$\rho_{pv} \equiv$ densidad volumétrica de carga de polarización equivalente

$$-Q = \int_V \rho_{pv} dv = \int_V (-\nabla \vec{P}) dv \longrightarrow \boxed{\rho_{pv} = -\nabla \vec{P}} \quad (C/m^3)$$

→ cuando no se anula la divergencia el dieléctrico polarizado aparenta estar cargado → la Q_T tras la pol... debe seguir siendo 0:

$$Q_T = \oint \rho_{ps} ds + \int_V \rho_v dv = \oint \vec{P} \cdot \hat{n}\, ds - \int_V \nabla P dV = 0$$

~~Definimos el vector desplazamiento como: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$~~

Redifinimos la divergencia para $\vec{E} \Rightarrow \nabla \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_v + \rho_{pv}) = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_v - \nabla \vec{P}) \Rightarrow \varepsilon_0 (\nabla \vec{E}) + \nabla \vec{P} = \rho_v$

$$\boxed{\nabla(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_v}$$

Nos interesa el campo $\vec{D}$ porque solo hay ρ_v

Definimos el vector desplazamiento : $\left[\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right]$, de forma de $\vec{D}$ solo depende de las cargas libres.

El uso del vector $\vec{D}$ nos permite escribir una relación de divergencia entre el campo eléctrico y la distribución de cargas libres en cualquier medio, sin tener que tratar de manera explícita con el vector de polarización $\vec{P}$ ni con la densidad de carga de polarización ρ_{pv} :

$$\left[\nabla\cdot\vec{D} = \rho_v\right] \quad (C/m^3) \qquad \int_v \nabla\cdot\vec{D}\,dv = \int_v \rho_v\,dv$$

↳ Las líneas de $\vec{D}$ nacen y mueren en ρ_v

Tomando la integral de volumen a ambos lados : $\left[\oint \vec{D}\cdot ds = Q\right]$ (C) ;

se trata de otra forma de la Ley de Gauss que establece que el flujo total hacia el exterior del desplazamiento eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga libre total encerrada en dicha superficie.

$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_v$
$\nabla\times\vec{E} = 0$

Al aplicar ~~los~~ un campo $\vec{E}$ los dipolos individuales de un dieléctrico polar tienden a alinearse con $\vec{E}$ (polarización del dieléctrico).

→ Cuando no hay campo externo $\vec{E}$, los dipolos individuales de un dieléctrico polar están orientados de forma aleatoria y $\boxed{\text{no}}$ producen un momento dipolar neto a nivel macroscópico.

Los átomos ~~tal~~ tras ser polarizados crean su propio campo, llamado campo inducido $\vec{E}_i$ (campo de los dipolos), que se opone al campo de la carga puntual. El campo resultante $\left(E = \dfrac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon}\right)$ es diferente al campo de una carga puntual en el espacio vacío $\left(E = \dfrac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\right)$

Medida de polarizabilidad del dieléctrico

↳ Lo único que cambia es ε_0.

→ Para un cuerpo dieléctrico de forma arbitraria las densidades de carga de polarización ρ_{ps} y ρ_{pv} pueden usarse para determinar el potencial debido a la polarización del dieléctrico:

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{s'} \frac{\rho_{ps}\,ds'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v'} \frac{\rho_{pv}\,dv'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

→ La carga tras la polarización: $\oint \rho_{ps}\,ds + \int_v \rho_{pv}\,dv = 0$

~~Cuando las propiedades del medio son lineales e isotrópicas → la polarización es directamente proporcional a $\vec{E}$ y la constante de proporcionalidad es independiente del campo.~~

Cuando las propiedades dieléctricas del medio son lineales e isotrópicas, la polarización es directamente proporcional a $\vec{E}$, y la constante de proporcionalidad es independiente de la dirección del campo: $\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}}$

donde χ_e es una cantidad sin dimensiones llamada susceptibilidad eléctrica. Un medio dieléctrico es lineal si χ_e es independiente de E, y es homogéneo si χ_e es independiente de las coordenadas espaciales.

Sustituyendo tenemos: $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)\vec{E} = \overbrace{\varepsilon_0}^{\text{permitividad absoluta}} \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}}$

permitividad relativa $\leftarrow \varepsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

Si ε_r es independiente de la posición $\rightarrow$ medio homogéneo.

Un medio lineal, homogéneo e isótropo $\rightarrow$ medio simple

En el caso de medios anisótropos, la constante dieléctrica es diferente para distintas direcciones del campo eléctrico y los vectores $\vec{D}$ y $\vec{E}$ tienen direcciones distintas.

$\rightarrow$ Rigidez dieléctrica

(*) $\rightarrow$ Pararrayos $\rightarrow$ mayor campo en la zona más curvada

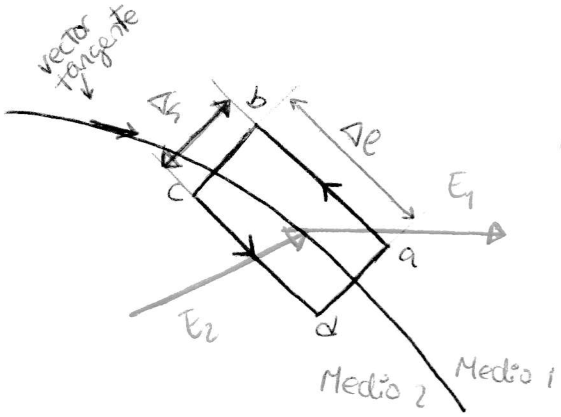
Hemos explicado que un campo eléctrico ocasiona pequeños desplazamientos de las cargas ligadas en un material dieléctrico, dando lugar a la polarización. Si el campo eléctrico es muy fuerte, puede sacar a los electrones de las moléculas. Estos electrones se acelerarán bajo la acción del campo eléctrico, chocarán violentamente con la estructura molecular de la red y ocasionarán dislocaciones y daños permanentes en el material.

Ruptura dieléctrica $\rightarrow$ el material se convertirá en conductor y pueden surgir corrientes muy grandes.

La intensidad máxima de campo eléctrico que puede resistir un material dieléctrico sin que se presente una ruptura se conoce como rigidez dieléctrica del material.

Cuando la intensidad del campo eléctrico excede la rigidez dieléctrica del aire a presión atmosférica, se "rompe" el aire, ocurre una ionización masiva y comienzan a aparecer chispas. La carga tiende a concentrarse en los ptos. agudos. Éste es el ppio de funcionamiento del pararrayos, que consiste en una varilla metálica situada en la parte superior de un edificio de gran altura. Cuando una nube con abundancia de cargas eléctricas se aproxima a un edificio alto, equipado con un pararrayos conectado a tierra, las cargas de signo opuesto son atraídas desde la tierra a la (~~ctes~~) punta de la varilla, donde la intensidad del campo eléctrico (*) es máxima. Cuando la intensidad de campo eléctrico excede la rigidez dieléctrica del aire húmedo, ocurre la ruptura y se ioniza el aire cerca de la punta, convirtiéndose en ~~un~~ conductor. Las cargas eléctricas de la nube se descargan entonces de manera inofensiva a tierra a través de un camino no conductor.

3. Condiciones de contorno para las componentes tangenciales del campo eléctrico en la superficie de separación de dos dieléctricos. → completarlo con el Wagness



Construyamos una trayectoria pequeña abcda con lados ab y cd en el medio 1 y 2 respectivamente, ambos paralelos a la sup. de separación e iguales a $\Delta \ell$. Si dejamos los (~~ctes~~) lados $bc = da = \Delta h$ se aproximen a cero, podemos ignorar sus contribuciones a la integral de línea $\vec{E}$ a lo largo de la trayectoria. Tenemos:

Como $\nabla \times \vec{E} = 0$ → integro

$$\oint_{abcda} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \vec{E}_1 \cdot \Delta \vec{\ell} + \vec{E}_2(-\Delta \vec{\ell}) = \vec{E}_{t_1} \Delta \vec{\ell} - \vec{E}_{t_2} \Delta \vec{\ell} = 0 \text{; Por lo que: } \boxed{\vec{E}_{t_1} = \vec{E}_{t_2}}$$

Lo cual establece que la componente tangencial de un campo $\vec{E}$ es continua a través de la superficie de separación entre los 2 medios. con ctes. dieléctricas distintas.

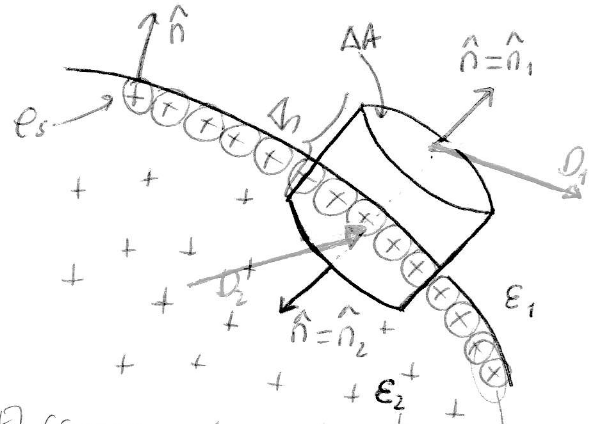
↳ siempre! → debido a que el rotacional es 0.

→ El campo se ~~difracta~~ refracta ↑↓

→ completarlo con el Wagness

4. Condiciones de contorno para las componentes normales del campo eléctrico en la superficie de separación de dos dieléctricos.

→ A partir de divergencia → $\nabla \vec{D} = \rho_v$



El campo electrost. se refracta

Cuando los medios son dieléctricos con permitividades ε_1 y ε_2, tenemos: $\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$

Las caras tienen un área ΔA y la altura Δh es muy pequeña. Al aplicar la ley de Gauss, tenemos:

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = (D_1\hat{n}_1 + D_2\cdot\hat{n}_2)\Delta A = \hat{n}(\vec{D}_1-\vec{D}_2)\Delta A = \rho_s\cdot\Delta A;\ \hat{n}(\vec{D}_1-\vec{D}_2)\cancel{\Delta A} = \rho_s\cancel{\Delta A};$$

$$\left[\hat{n}(\vec{D}_1-\vec{D}_2) = \rho_s\right] = \left[D_{1n} - D_{2n} = \rho_s\right] \quad (C/m^2)$$

La componente normal del campo $\vec{D}$ es discontinua a través de una superficie de separación cuando existe una carga superficial, y que la cantidad de la discontinuidad es igual a la densidad superficial de carga

Si $\rho_s = 0 \overset{?}{\Rightarrow} D_{n1} \overset{?}{=} D_{n2}$

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

→ En los apuntes de Paco está de forma distinta. ↳ Si $\rho_s = 0$ → Las c... $\rho_s = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 E_{n_1} = \varepsilon_2 E_{n_2}$

cuando $\rho_s = 0$, las componentes $\vec{D}$ sí que son continuas, pero vemos que las componentes normales de $\vec{E}$ no lo son

las componentes normales no van a ser continuas al estar en medios distintos

sería $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$

5. Capacitancias y condensadores

Un conductor en un campo eléctrico estático es un cuerpo equipotencial y que las cargas depositadas en un conductor se distribuirán sobre su superficie de manera que desaparezca el campo eléctrico en su interior. Suponga que el potencial debido a una carga Q, es V. Si se aumentara la carga total en un factor k se incrementaría la densidad superficial de carga, ya que el conductor sigue siendo un cuerpo equipotencial en una situación estática. De la ecuación:

pongo ρ_s y no ρ_v porque son conductores

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'} \frac{\rho_s \cdot ds'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

, llegamos a la conclusión de que el potencial de un conductor aislado es directamente proporcional a su carga total → al aumentar V en un factor "k", se incrementa $\vec{E} = -\nabla V$ en el mismo factor. Por lo tanto, Q/V no cambia:

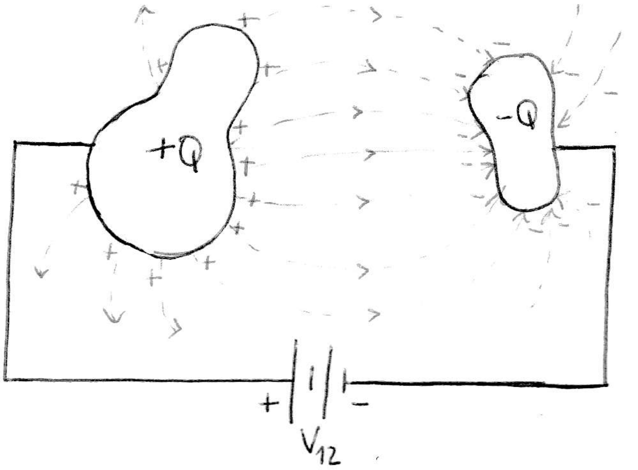
$C = \frac{Q}{V}$; $\boxed{Q = C\cdot V}$ (F), donde la cte. de proporcionalidad C se denomina <u>capacitancia</u> del cuerpo conductor aislado.

El condensador (o capacitor) consiste en dos conductores separados por el espacio libre o por un medio dieléctrico. Cuando se conecta una fuente de voltaje de corriente continua entre los (dos) conductores, ocurre una transferencia de carga que produce una carga $+Q$ en un conductor y $-Q$ en el otro. En el dibujo vemos varias líneas de campo eléctrico que se originan en las cargas positivas y terminan en las negativas. Las líneas de campo son perpendiculares a las superficies de los conductores, las cuales son superficies equipotenciales.

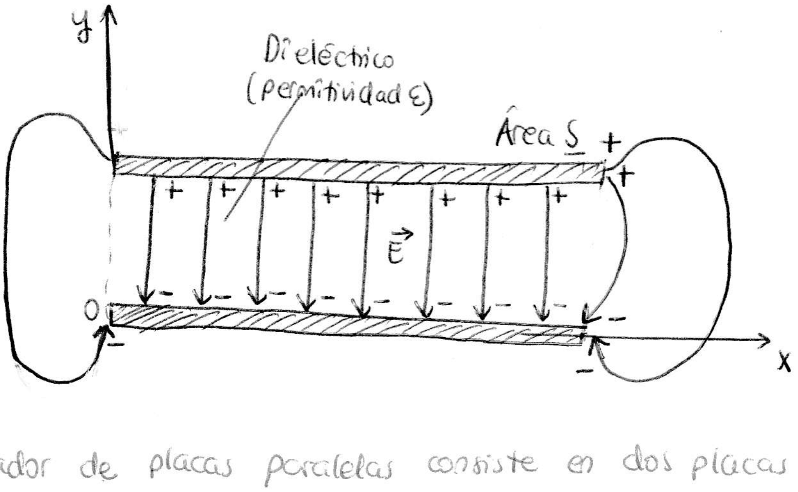
Considerando que V es la diferencia de potencial entre los dos conductores $\rightarrow V_{12}$ y usando que $Q = CV \rightarrow$

$$\left[C = \frac{Q}{V_{12}} \quad (F) \right]$$

La capacitancia de un condensador es una propiedad física de un sistema de dos conductores. Depende de la geometría del condensador y de la permitividad del medio. Los conductores que componen el condensador pueden tener forma arbitraria.



→Ejemplo

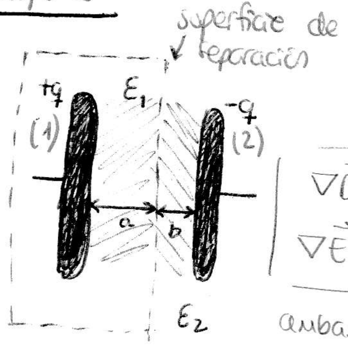


Un condensador de placas paralelas consiste en dos placas paralelas de área S separadas por una distancia uniforme d. El espacio entre las placas se llena con un dieléctrico de permitividad constante ε. Capacitancia?

→ Usamos coordenadas cartesianas. Colocamos cargas $+Q$ y $-Q$ en las placas conductoras superior e inferior, respectivamente. Suponemos que las cargas se distribuyen de manera uniforme en las placas conductoras, con densidades superficiales $+\rho_s$, $-\rho_s$; dónde $\rho_s = \frac{Q}{S}$. A partir de la ecuación $D_{1n} = \varepsilon_1 E_{1n} = \rho_s$ (→ aplicando condiciones de frontera cerca del conductor); $\vec{E} = -\frac{\rho_s}{\varepsilon}\hat{y} = -\frac{Q}{S \cdot \varepsilon}\hat{y}$, que es cte. en el dieléctrico si se ignora el efecto marginal del campo eléctrico en los bordes de las placas. Entonces,

$$V_{12} = -\int_{y=0}^{y=d} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_0^d \left(-\frac{Q}{S \cdot \varepsilon}\hat{y}\right) dy \cdot \hat{y} = \frac{Q}{\varepsilon \cdot S} d \rightarrow \left[C = \frac{Q}{V} = \varepsilon \cdot \underbrace{\frac{d}{S}}_{\text{independiente de } Q \text{ y } V_{12}} \right] (F)$$

→ **Ejemplo 2**



Condensador plano-paralelo, con dos dieléctricos (ε_1 y ε_2). Despreciando efectos de borde, calcular la capacitancia.

$$\nabla \vec{D} = \rho_v$$
$$\nabla \vec{E} = \rho_v + \rho_{pv}/\varepsilon_0$$

Las ρ_v aparecen en las placas conductoras, lo que significa que el campo D nace en (1) y muere en (2), debido a que no tiene densidad de carga superficial → el campo D es igual en ambas placas, uniforme en toda la zona ε_1 y ε_2.

Estos campos son normales a la superficie de separación.

Sea la carga del condensador q, por simetría el campo en el condensador será homogéneo (menos en los bordes). Creando una superficie Gaussiana, encerrando la placa positiva, vemos que al despreciar los efectos de borde, la única contribución a la integral $\oint \vec{D} \cdot d\vec{s}$ procede de la parte de la superficie gaussiana entre las placas.

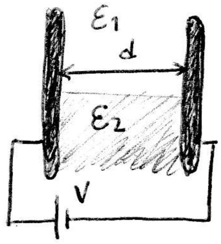
$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int D \cdot ds = D \cdot A = q \rightarrow D = \frac{q}{A}$$; y los campos eléctricos por lo tanto;

$\vec{E}_1 = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 A}$; $\vec{E}_2 = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 A}$; el voltaje entre placas: $V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \underbrace{\int \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}}_{\text{Dieléctrico 1}} + \underbrace{\int \vec{E}_2 \, d\vec{l}}_{\text{Dieléctrico 2}} =$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 A} \int_0^a dl + \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 A} \int_a^{a+b} dl \Rightarrow V = \frac{q}{\varepsilon_0 A}\left(\frac{a}{\varepsilon_1} + \frac{b}{\varepsilon_2}\right)$$

Y la capacitancia por lo tanto: $C = \frac{q}{V} = \boxed{\frac{\varepsilon_0 A}{(a/\varepsilon_1 + b/\varepsilon_2)}}$

→ Ejemplo 3



Condensador plano-paralelo separado $\underline{d}$. Calcular capacitancia
↳ E en este caso es cte. → Al ser V cte. → E tb

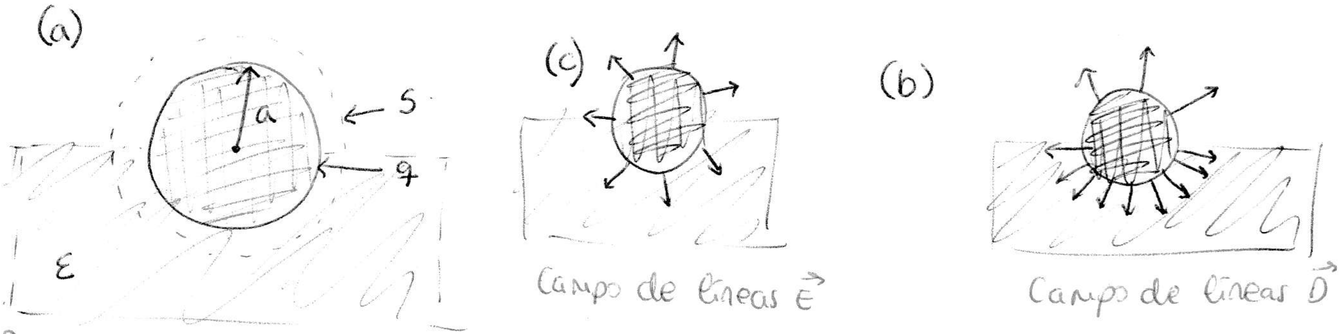
Siendo la diferencia de potencial entre placas V → por simetría el campo entre placas → $E = \frac{V}{d}$ → $D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{V}{d}$; $D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{V}{d}$

Las cargas son respectivamente:

$$q_1 = D_1 A_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{V}{d} A_1 \quad ; \quad q_2 = D_2 A_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{V}{d} A_2 \Rightarrow q = q_1 + q_2$$

↳ capacitancia → $C = \frac{q}{V} = \boxed{\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2)}{d}}$

→ Ejemplo 4



Flotando en un líquido no-conductor

Campo de líneas $\vec{E}$

Campo de líneas $\vec{D}$

Construimos una esfera gaussiana de superficie S y radio r, y aplicamos la ley de Gauss:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} D_{líquido} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{D}_{aire} \cdot d\vec{S} = q$$

La geometría del problema → todos los campos son radiales → $\vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot dS$, como $D_{líquido}$ y D_{aire} son ctes. → $D_{líq} \int_{S_1} d\vec{S} + D_{aire} \int d\vec{S} = q$; $(D_{líq} + D_{aire}) 2\pi r^2 = q$

$D_{líq} = \varepsilon_0 \varepsilon E_{líq}$
$D_{aire} = \varepsilon_0 E_{aire}$ } campo radial, tangencial a la frontera entre el líquido y el aire;

y con la condición de frontera → $E_{líq} = E_{aire}$ ⇒ $\begin{cases} D_{líq} = \varepsilon_0 \varepsilon E \\ D_{aire} = \varepsilon_0 E \end{cases}$ → sustituyendo:

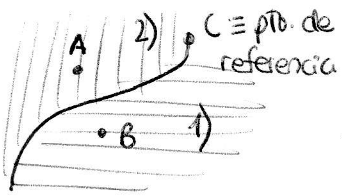
$$(\varepsilon_0 \varepsilon E + \varepsilon_0 E) 2\pi r^2 = q \; ; \; E = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 (\varepsilon + 1) r^2} \rightarrow \begin{cases} D_{líq} = \frac{\varepsilon q}{2\pi(\varepsilon+1) r^2} \\ D_{aire} = \frac{q}{2\pi(\varepsilon+1) r^2} \end{cases}$$

Y la densidad de carga superficial (ρ_s): (igual al vector $\vec{D}$)
↳ por aplicar cc

$$\rho_{s_1} = \frac{\varepsilon q}{2\pi(\varepsilon+1) a^2} \quad ; \quad \rho_{s_2} = \frac{q}{2\pi(\varepsilon+1) a^2}$$

• Diversas cosas aleatorias que dice Paco en clase

→ Demostración de que el potencial sí es continuo



$$V_A = \int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{l} + V_C = \int_A^C \vec{E}_{t_2}\cdot d\vec{l} \overset{E_{t_2}=E_{t_1}}{=} \int_A^C \vec{E}_{t_1}\cdot d\vec{l} + V_C$$

$$V_B = \int_B^C \vec{E}\cdot d\vec{l} + V_C = \int_B^C E_{t_1}\cdot dl + V_C$$

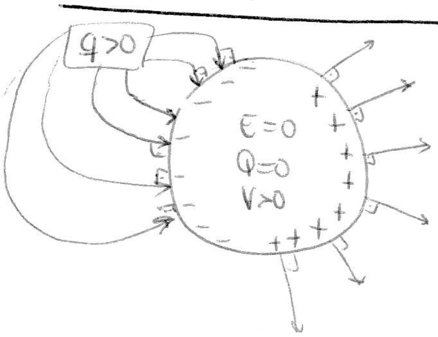
$$\boxed{V_A = V_B}$$

Camino de separación adyacente a la superficie de separación.

Como $E_{t_1} = E_{t_2}$ en la superficie de integración, las integrales, entonces V_C es la misma. → Eso significa $V_A = V_B$ → Las componentes del potencial (o el potencial) es continuo.

→ Ejercicio de un examen → detrás página 3 apuntes

→ $Q=0 \not\rightarrow V=0$, y $V=0 \not\rightarrow Q=0$



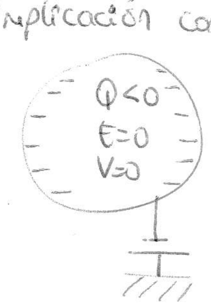
Esta esfera es conductora e inicialmente está descargada.

La carga que tiene líneas de campo, induce unas cargas negativas, pero como es neutra y está descargada, no queda más remedio que induzca cargas positivas en el otro lado, para mantenerla neutra, y de esas cargas ⊕ emanarán líneas de campo hacia el infinito. Así, la carga seguirá siendo cero, pero las líneas de campo al ∞ implican $V>0$, por lo que:

$$Q=0 \not\longrightarrow V=0$$

Esto es 0 pq aparecen 2 ~~cargas~~ campos en sentido contrario que se anulan.

→ La implicación contraria:



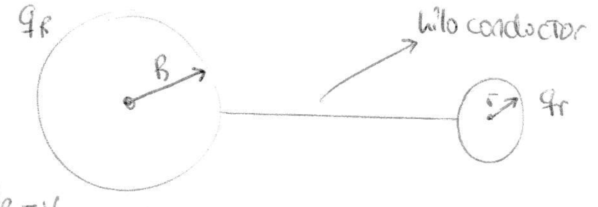
La condición inicial es $V=0$, por lo que desaparecen las líneas de campo al ∞. Para mantener $V=$cte, conectamos a tierra (que se encarga de entregar e^- al conductor).

Así vemos que la carga cambia para mantener el potencial cero. Aunque Tierra ceda e^-, sigue siendo neutro. Entonces, saca tantos para que puedan recoger todas las líneas de campo que salen de q, y así no haya ninguna que vaya al ∞ y cree V.

$$V=0 \not\longrightarrow Q=0$$

→ Un conductor no esférico tendrá mayor campo en la zona más curvada

Conectamos 2 conductores, y así será como tener 1 único (~~conector~~) conductor, pues estarán a igual potencial.



$$V_r = \frac{q_r}{\cancel{4\pi\varepsilon_0} r} = \frac{q_R}{\cancel{4\pi\varepsilon_0} R} \rightarrow \boxed{\frac{q_r}{r} = \frac{q_R}{R}} \rightarrow q_r = \frac{q_R}{R} r$$

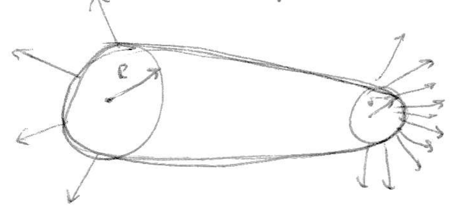
$V_R = V_r$

Consideremos a mayores que q_r y q_R se distribuyen uniformemente:

$$\left.\begin{aligned} \rho_{sR} &= \frac{q_R}{4\pi R^2} \\ \rho_{sr} &= \frac{q_r}{4\pi r^2} \end{aligned}\right\} \quad \rho_{sr} = \frac{q_r}{4\pi r^2} = \frac{q_R \cdot \cancel{r}}{R\, 4\pi r^{\cancel{2}}} = \frac{q_R}{R\, 4\pi r} \rightarrow \text{Por lo tanto: } \cancel{4\pi R^2} \rho_{sR} = \cancel{4\pi R} \rho_{sR};$$

$$\rho_{sr} = \frac{\rho_{sR} \cdot R}{r} \rightarrow \boxed{\rho_{sr} > \rho_{sR}}$$

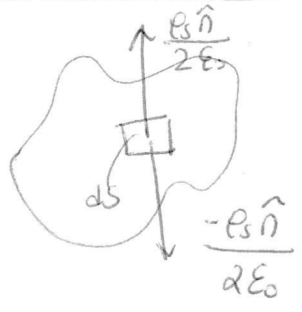
Por lo que ahora podemos ponerlo en un solo conductor aplicando $\rho_{sr} > \rho_{sR}$



↳ implica $E_r > E_R$ → Obteniendo un mayor campo en la zona más curvada

→ El pararrayos actúa así → ionizando el aire por la zona más curvada, el rayo busca el camino más fácil.

→ Conductor perforado



Nuestro objetivo será calcular la fuerza sobre el elemento conductor. $dF = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \rho_s dS$

Todas las cargas menos las del el elemento de sup. tienen que distribuirse de nuevo para garantizar que el campo sea nulo, de forma que las únicas formas de campo serán las que aparecen en el dibujo.

Autocampo → campo que producen el resto de cargas

$$dF = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \rho_s dS \rightarrow \text{Dirección normal a la superficie}$$

Las restantes cargas tienen que cancelar el autocampo entrante creado por el elemento de superficie: $\frac{dF}{dS} = \frac{\rho_s^2}{2\varepsilon_0}$ → Tendría unidades de presión

presión electrostática

• **Anexo**: Parte del Tema 4 que entra en el control del T. 3 → presión electrostática

~~sea x la separación entre placas de un condensador plano~~

↳ Griffids

Dado que el campo en el interior del conductor es cero, la condición de frontera requiere (*) que el campo fuera sea: $\vec{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\hat{n}$

En la presencia de un campo eléctrico, una superficie se cargará, y esta experimentará una fuerza → la fuerza por unidad de área → $\vec{F} = \rho_s \vec{E}$. Dado que el campo eléctrico es discontinuo en la superficie de carga → debemos usar ambos valores del campo

↳ $\vec{f} = \sigma \vec{E}_{promedio} = \frac{1}{2}\sigma(E_{\uparrow} + E_{\downarrow})$

¿por qué el promedio? → escojamos una superficie lo suficientemente pequeña (1), de forma que sea prácticamente plana y la carga superficial sea prácticamente cte. → el campo total consta de 2 partes: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_{otros}$. La fuerza 1 es debida solamente a la carga en 1, que provoca un campo $\frac{\rho_s}{\varepsilon_0}$, por lo que: $\vec{E}_{\uparrow} = \vec{E}_{otros} + \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{n}$; $\vec{E}_{\downarrow} = \vec{E}_{otros} - \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{n}$

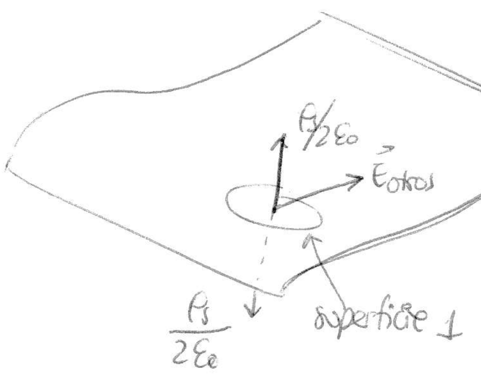
↳ $\vec{E}_{otros} = \frac{1}{2}(\vec{E}_{\uparrow} + \vec{E}_{\downarrow}) = \vec{E}_{promedio}$

Si esto se aplica a cualquier superficie cargada, particularmente a un conductor → donde el campo es cero dentro y en el exterior es $\frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\hat{n}$, por lo que la media será $\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{n}$, y la fuerza por unidad de área $\vec{f} = \rho_s \cdot \vec{E} = \frac{\rho_s^2}{2\varepsilon_0}\hat{n}$ → presión electrostática en la superficie

tiende a atraer el conductor hacia el campo, independientemente del signo de ρ_s.

Expresando la presión en función del campo fuera de la superficie

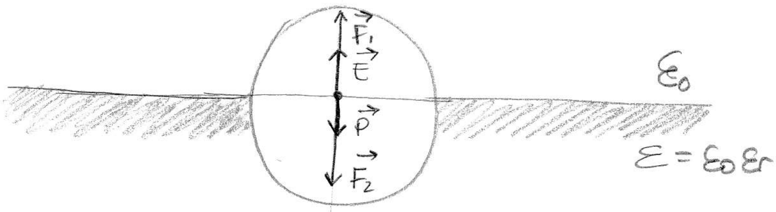
↳ $p = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2$



→ Esfera flotando en un dieléctrico → cuánto valdría la carga de la esfera de forma que flote entre el dieléctrico y el aire de manera equidistante.

El valor que debemos obtener es = $q^2 = \frac{16}{3}\pi^2 \varepsilon_0 a^5 g \frac{(1+\varepsilon_r)^2}{\varepsilon_r - 1} \cdot (\delta' - 2\delta)$

$\boxed{\begin{array}{l} \delta = \rho_{esfera} \\ \delta' = \rho_{líquido} \end{array}}$



Equilibrio: $\vec{F}_e + \vec{P} + \vec{E} = 0$

$\hookrightarrow \vec{F}_e = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \equiv$ fuerza debido a la presión electrostática

Peso $\equiv P = \underbrace{\left(\frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \delta\right)}_{m = \text{densidad}\cdot\text{volumen}} g$; Empuje $\equiv E = \underbrace{\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)}_{\text{Volumen sumergido}} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\delta'}_{\text{densidad}} g$

→ porque solo está sumergida media esfera

Ahora para obtener el campo:

$$\oint \vec{D}\,d\vec{S} = \int D_1 ds_1 + \int D_2 ds_2 = Q_{encerrada} \Rightarrow \varepsilon_0 E\, 2\pi r^2 + \varepsilon_0 \varepsilon_r E\, 2\pi r^2 = Q_{encerrada\ libre}$$

$D_1 ds_1 \leftarrow \varepsilon E \cdot A_1$, $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$, $\varepsilon_r = 1$

$D_2 ds_2 \leftarrow \varepsilon_0 \varepsilon_r E \cdot A_2$

media esfera → $2\pi r^2$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon_0 E\, 2\pi r^2 (\varepsilon_r + 1) = Q ;$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{2\pi r^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_r + 1)}}$$

Los campos D_{aire} y $D_{líquido}$.

$$\vec{D}_{aire} = \frac{q}{2\pi r^2 (\varepsilon_r + 1)} ; \quad \vec{D}_{líquido} = \frac{q\varepsilon_r}{2\pi r^2 (\varepsilon_r + 1)}$$

→ Fuerza sobre la mitad de la esfera

$$F_{1\,aire} = \frac{q'^2}{32\pi \varepsilon_0 a^2} \underset{q' = \frac{2q}{\varepsilon_r + 1}}{=} \frac{4q^2}{32\pi \varepsilon_0 a^2 (\varepsilon_r + 1)^2} = \frac{q^2}{8\pi a^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_r + 1)^2}$$

$$F_{2\,líquido} = \frac{q''^2}{32\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r a^2} \underset{q'' = \frac{2q\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}}{=} \frac{4q^2 \varepsilon_r^2}{32\pi a^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r (\varepsilon_r + 1)^2} = \frac{q^2 \varepsilon_r}{8\pi \varepsilon_0 (\varepsilon_r + 1)^2 a^2}$$

$$F_{1a} - F_{2e_q} + E - P = 0 \; ; \quad F_1 - F_2 = P - E \; ; \; \boxed{F_2 - F_1 = E - P}$$

$$\frac{q^2 \varepsilon_r}{8\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r+1)^2 a^2} - \frac{q^2}{8\pi a^2(\varepsilon_r+1)^2} = \frac{2}{3}\pi a^3 \delta' g - \frac{4}{3}\pi a^3 \delta g \; ;$$

$$\frac{q^2(\varepsilon_r - 1)}{8\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r+1)^2 a^2} = \frac{2\pi a^3 g(\delta' - 2\delta)}{3} \; ; \; \boxed{\underbrace{q^2 = \frac{16}{3}\pi^2 a^5 \varepsilon_0 \frac{(\varepsilon_r+1)^2}{(\varepsilon_r-1)} g\,(\delta' - 2\delta)}_{\text{Valor que queríamos obtener}}}$$

Otra forma de hacerlo es directamente teniendo en cuenta que:

$$F_e = F_1 - F_2 = \frac{2\pi a^2}{2\varepsilon_0}\cdot \rho_{s_1}^2 - \frac{2\pi a^2}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}\cdot \rho_{s_2}^2 = \frac{\cancel{2}\pi a^2}{2\cancel{2}\varepsilon_0}\left(\rho_{s_1}^2 - \frac{\rho_{s_2}^2}{\varepsilon_r}\right)$$

→ diferencial de superficie en esféricas → aparece un 2 en el denominador

$$P = \frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \delta g \; ; \; E = \frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \frac{1}{2}\delta' g = \frac{2}{3}\pi a^3 \delta' g$$

→ Emma lo tiene hecho tb futura Julia ↳ lo pasó por el grupo de clase tb

Para que esté en equilibrio: $\boxed{F_1 - F_2 = P - E}$

$$\frac{\pi a^2}{2\varepsilon_0}\left(\rho_{s_1}^2 - \frac{\rho_{s_2}^2}{\varepsilon_r}\right) = \frac{4}{3}\pi a^3 \delta g - \frac{2}{3}\pi a^3 \delta' g = \frac{2}{3}\pi a^3 g\,(2\delta - \delta')$$

$$\frac{\cancel{\pi a^2}}{2\varepsilon_0}\left(\rho_{s_1}^2 - \frac{\rho_{s_2}^2}{\varepsilon_r}\right) = \frac{2}{3}\cancel{\pi a^3} g(2\delta - \delta') \; ; \; \rho_{s_1}^2 - \frac{\rho_{s_2}^2}{\varepsilon_r} = \frac{4}{3} a\varepsilon_0 g(2\delta - \delta')$$

Ahora sabemos que: $\rho_s = \dfrac{\varphi}{A} \rightarrow \rho_{s_1} = \dfrac{\varphi}{2\pi a^2(\varepsilon_r+1)}$

del ejercicio anterior →

$$\hookrightarrow \rho_{s_2} = \frac{\varphi\varepsilon_r}{2\pi a^2(\varepsilon_r+1)}$$

$$\frac{\varphi^2}{4\pi^2 a^4(\varepsilon_r+1)^2} - \frac{\varphi^2\varepsilon_r^2}{4\pi^2 a^4(\varepsilon_r+1)^2\varepsilon_r} = \frac{4}{3}\varepsilon_0 a g(2\delta - \delta') \; ; \; \frac{\varphi^2\varepsilon_r - \varphi^2\varepsilon_r^2}{4\pi^2 a^4(\varepsilon_r+1)^2\varepsilon_r} = \frac{4}{3}\varepsilon_0 a g(2\delta - \delta') \; ;$$

$$\frac{\varphi^2\varepsilon_r(1-\varepsilon_r)}{4\pi^2 a^4(\varepsilon_r+1)^2\varepsilon_r} = \frac{2}{3}\varepsilon_0 a g(2\delta - \delta') \; ; \; \boxed{\varphi^2 = \frac{16\pi^2 a^5 \varepsilon_0 g(\varepsilon_r+1)^2 \cancel{\varepsilon_r}(2\delta - \delta')}{3\cancel{\varepsilon_r}(1-\varepsilon_r)}}$$

Ahora el potencial para que se mantenga a flote

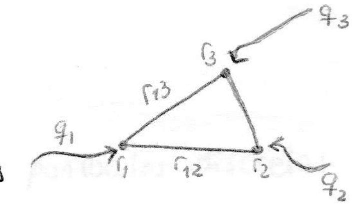
Recordemos que $E = \dfrac{\Phi}{2\pi a^2 \varepsilon_0(\varepsilon_r+1)} \Longrightarrow V_0 = -\int_{\infty}^{a} E\,dr = -\int_{\infty}^{a} \dfrac{\Phi}{2\pi a^2 \varepsilon_0(\varepsilon_r+1)}\,dr = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r+1)a}$

Ahora lo dejo en función de las densidades sustituyendo el valor de la carga:

$$V_0^2 = \frac{\frac{4\,16}{3}\cancel{\pi}^{}\,a^{\cancel{6}\,3}\,g\,\cancel{\varepsilon_0}\,\frac{\cancel{(\varepsilon_r+1)}^{2}}{(\varepsilon_r-1)}(2\delta-\delta')}{4\cancel{\pi}^{2}\,\varepsilon_0^{2}\,\cancel{(\varepsilon_r+1)^{2}}\,\cancel{a^{2}}} = \boxed{\frac{4a^3 g(2\delta-\delta')}{3\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)}}$$

TEMA 4: ENERGÍA Y FUERZAS ELECTROSTÁTICAS

1. Energía electrostática almacenada en un sistema de cargas



La energía eléctrica asociada a un sistema de 2 cargas, q_1 y q_2, la podemos definir como el trabajo necesario para mover lentamente una carga q_2 hasta el infinito, contra el campo creado por otra carga q_1 situada en $\vec{r}_1$, a su posición final, $\vec{r}_2$ en el sistema:

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_2 \left(\frac{q_1}{r_{12}}\right) = q_2 V_1(\vec{r}_2) \quad (4.1)$$

→ dado que el potencial en el ∞ es nulo

Si tenemos en cuenta otra tercera carga q_3 desde el infinito, se necesita un trabajo adicional → $\Delta W = Q_3 V_3 = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}}\right)$; y del mismo modo si tenemos una cuarta carga.

El trabajo total para ubicar las cuatro cargas en sus posiciones finales del sistema:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_1q_4}{r_{14}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}} + \frac{q_2q_4}{r_{24}} + \frac{q_3q_4}{r_{34}}\right) = W_2 + W_3 + W_4$$

La expresión general de la energía potencial de un grupo de N cargas puntuales:

$$W_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j>i}}^{N}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} \quad ; \quad W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}$$

→ contar los pares dos veces y luego dividir el total entre dos

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \underbrace{\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_j}{r_{ij}}\right)}_{\text{potencial en el pto. } \vec{r}_i \text{ debido a las restantes cargas}} \longrightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r}_i)} \quad (4.2)$$

→ trabajo necesario para ubicar las N cargas en sus posiciones finales en el sistema (que coincidirá con la cantidad de energía obtenida al separarlas del mismo)

↓ representa la energía almacenada en la configuración del sistema de N cargas.

* Esta energía puede dar valores negativos, no contiene las autoenergías porque estas serían infinitas.

2. Energía electrostática almacenada en una distribución de carga continua.

Se puede generalizar a distribuciones continuas, cambiando la suma por una integral,

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r}_i) \longrightarrow \left[W_e = \frac{1}{2}\int_v \overset{\text{potencial}}{V}\, \rho_v \cdot dv\right] ; \text{ puesto que } dq_i = \rho_v \cdot dv \quad (4.3)$$

→ El valor W_e en esa ecuación incluye el trabajo (energía propia) necesaria para formar la distribución de cargas macroscópicas, ya que es la energía de interacción entre cada elemento de carga infinitesimal y todos los otros elementos de carga infinitesimales.

De la misma forma: $\left[W_e = \frac{1}{2}\int_s V\rho_s\, ds\right]$

$$\left[W_e = \frac{1}{2}\int_\ell V\rho_\ell\, d\ell\right]$$

En realidad, la región de integración de las integrales anteriores puede extenderse (del volumen que ocupan realmente las cargas, a todo el espacio, dado que en las regiones donde no hay carga → $\rho_v = 0$ → y estas regiones no contribuyen → $W_e = \frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \rho_v V\, dv$

3. Energía electrostática en términos de cantidades de campo

La expresión de la energía electrostática de una distribución de carga en la ecuación, contiene la densidad de carga fuente ρ_v y la función de potencial V. En muchos casos es más conveniente contar con una expresión de W_e en términos de las cantidades de campo $\vec{E}$ o $\vec{D}$, sin tener que conocer ρ_v de manera explícita.

$(\nabla \vec{D}) V = \nabla(V \cdot \vec{D}) - \vec{D} \cdot \nabla V$

Sustituyendo $\rho_v = \nabla \cdot \vec{D} \rightarrow \left[W_e = \frac{1}{2}\int_V (\nabla \cdot \vec{D}) V \cdot dv \right]$; y usando la identidad vectorial: (4.4)

$\nabla \cdot (V\vec{D}) = V\nabla \cdot \vec{D} + \vec{D} \cdot \nabla V$, podemos expresar la energía eléctrica como:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \nabla(\vec{D}V)dv - \frac{1}{2}\int_V (\vec{D} \cdot \nabla V)dv = \frac{1}{2}\oint V\vec{D}\hat{n} \cdot ds + \frac{1}{2}\int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot dv,$$

th. divergencia

donde hemos usado el th. de la divergencia para cambiar la 1ª integral de volumen por una de superficie cerrada, y hemos sustituido $\vec{E} = -\nabla \vec{V}$

cuando que el radio $\rightarrow \infty$, es lo mismo que integrar en todo el espacio

Puesto que V puede ser cualquier volumen que incluya todas las cargas, podemos elegirlo de forma que sea una esfera muy grande con radio R. Conforme $R \rightarrow \infty$, el potencial eléctrico V, y la magnitud de desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ disminuyen según $\frac{1}{R}$ y $\frac{1}{R^2}$ respectivamente. El área de la superficie limitadora aumenta a razón de $R^2 \rightarrow$ la integral de superficie de la ecuación decrece al menos con una razón $1/R$ y desaparecerá conforme $R \rightarrow \infty$. De esta manera tendremos solo la segunda integral del miembro derecho de la ecuación,

esa parte de la integral $\rightarrow 0$

extendida a todo el espacio puesto que al anularse la otra integral queda todo:

$\hookrightarrow$ desde cualquier pto. de S, la carga total parecerá una carga puntual a una distancia R.

válida para un medio general $\rightarrow$

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot dv} \quad (4.5)$$

; usando que $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ para un medio lineal, homogéneo e isótropo:

válida para medios $\rightarrow$ lineales e isótropos

$$\left[W_e = \frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \varepsilon E^2 dv \right] = \int_{\text{todo el espacio}} w_e\, dv \; ; \text{ donde } \left[w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \right] (J/m^3) \quad (4.6)$$

$\hookrightarrow$ si a esto le resto las auto-energías $\rightarrow$ obtengo la energía de interacción

$\hookrightarrow$ densidad de carga electrostática

Hemos logrado expresar la energía completamente en función del campo eléctrico (aunque las cargas no aparezcan en forma explícita, no han desaparecido, dado que son las fuentes mismas del campo eléctrico), esta forma como integral de volumen, en la que regiones donde $\vec{E} \neq 0$ contribuyen a la integral, mientras que aquellas para las que $E = 0$ no contribuyen, se presta a una interpretación muy sencilla: la energía electrostática está distribuida en forma continua a través

del espacio con una densidad de carga electrostática:
→ tiene en cuenta la de interacción y las autoenergías? → no entiendo lo que tengo apuntado de clase?

• Siempre es positiva, y no tiene nada que ver con que (4.2) pueda ser negativa, la ecuación (4.2) no tiene en cuenta el trabajo necesario para crear las cargas puntuales, empezamos con cargas puntuales y simplemente hemos encontrado el trabajo necesario para unirlas, la ecuación (4.5) considera esta energía ∞.

• La densidad de energía electrostática no está unívocamente definida → se le podría sumar cualquier cantidad X cuya integral de volumen sobre todo el espacio sea cero, sin estar en desacuerdo con (4.5). Sin embargo, (4.6) es sencilla, posible, y muy atractiva desde el pto. de vista de expresar las cosas en función del campo. El pto. de vista aceptado es tomar (4.6) como correcta.

Como el campo E está al cuadrado, no se rige por el ppio de superposición. La energía de un sistema compuesto no es la suma de las energías consideradas de forma separada, tb hay términos cruzados. P.ej, si doblas la carga → cuadriplicas la energía

→ Energía de densidad electrostática para una carga puntual, usando

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \varepsilon E^2 dv = \int_{\text{todo el espacio}} w_e \, dv$$

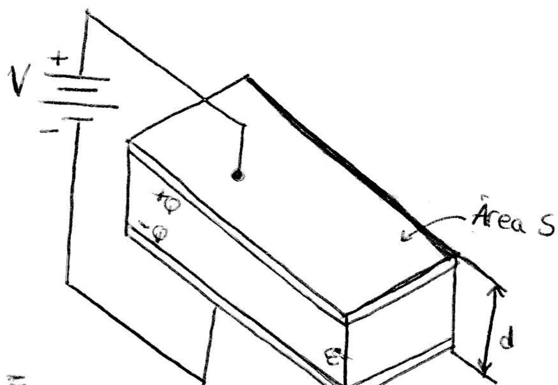
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2} \Rightarrow w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\cdot\frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\cdot\frac{q^2}{r^4} = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{r^4}$$ → integramos esto en todo el espacio →

$$\int_{\text{todo el espacio}} w_e \underbrace{dV}_{\text{una esfera}} = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0^2}\int_{\text{todo el espacio}} \frac{1}{r^4}\cdot \underbrace{dV}_{dV = A\,dr = 4\pi r^2 dr} = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{1}{r^4}4\pi \cancel{r^2} dr = \frac{-q\cdot 4\pi}{32\pi^2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_0^\infty = \frac{4\pi q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^0 \rightarrow \underline{\underline{\infty}}$$

en cargas puntuales la carga va de 0 a ∞

Energía necesaria para crear una carga puntual, que como vemos, da infinito → por eso cuando calculamos la energía calculamos la energía de interacción → la energía de las cargas puntuales tiende a 0.

4. Energía almacenada en un condensador



Si ignoramos los efectos marginales del campo en los bordes, el campo eléctrico en el dieléctrico es uniforme (sobre la placa), y constante a través del dieléctrico, y tiene una magnitud: $E = \frac{V}{d}$.

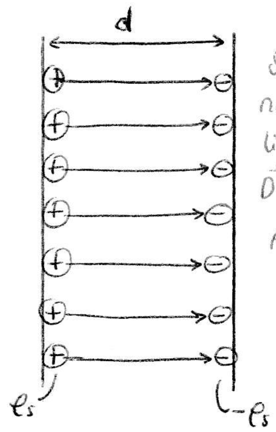
Usando (4.5) → $W_e = \frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \varepsilon E^2 dv = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon\left(\frac{V}{d}\right)^2 dv =$

$$\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{V}{d}\right)^2\cdot\underbrace{\int_V dv}_{} = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{V}{d}\right)^2\cdot v = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{V}{d}\right)^2\cdot S\cdot d = \frac{1}{2}\left(\varepsilon\frac{S}{d}\right)V^2$$; si recordamos que $\varepsilon\cdot\frac{S}{d}$ es la capacidad del condensador de placas planas paralelas → $\boxed{W_e = \frac{1}{2}CV^2}$ (4.7)

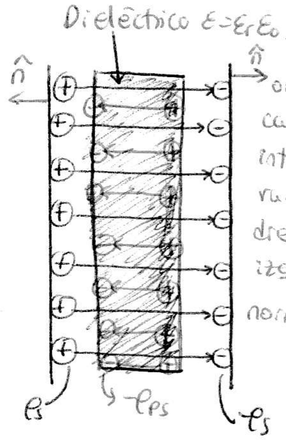
5. Energía almacenada en la polarización

Cuando se añade un dieléctrico a un condensador en el espacio libre, aumentará su capacidad, el aumento de esta capacidad es ocasionado por la polarización, $\boxed{C = \varepsilon_r C_0}$, (4.8)

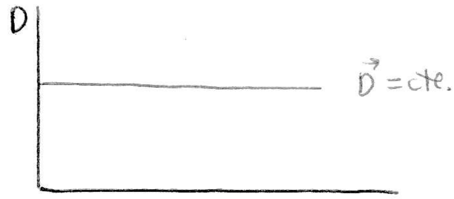
donde $C_0 \equiv$ capacidad en el espacio libre.

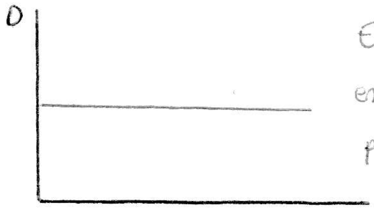


Sabemos que el campo $\vec{D}$ nace y muere en las cargas libres, en este caso $\vec{E}$ tb, $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} + \cancel{\vec{P}}^{\,0} \to \vec{D}$ y $\vec{E}$ son proporcionales

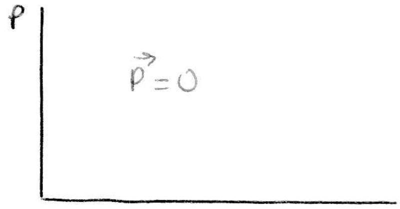


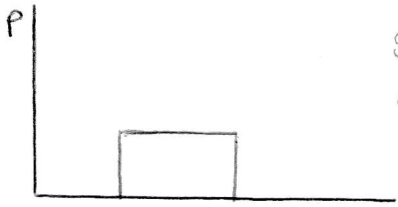
Todos los momentos dipolares se orientan en la misma dirección que el campo. Las cargas libres no cambian al introducir el dieléctrico, estas cargas libres van a polarizar el dieléctrico. Supondremos polarización uniforme $\to$ van de izq. a der. $\to \rho_{Ps} = \vec{P}\cdot\hat{n} \to$ donde esta normal es saliente del dieléctrico.



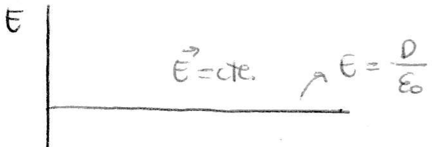


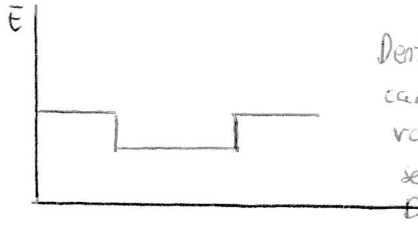
El campo $\vec{D}$ nace y muere en las cargas libres (de + a −), por lo tanto es el mismo en ambos casos.



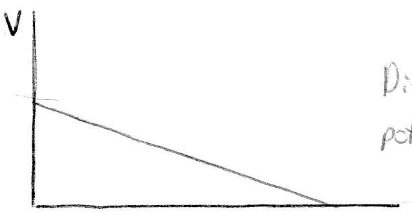


Solo existirá polarización en el dieléctrico.

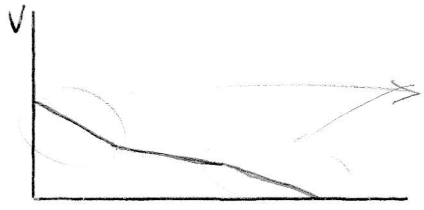




Dentro del dieléctrico el campo es menor que en el vacío (hay dos cargas que se oponen, libre y cargada). Disminuye donde el dieléctrico



Diferencia de potencial disminuyendo



La pendiente a la izq. y a la derecha será la misma, cambiará el potencial donde está el dieléctrico.

Condensador en aire

Condensador con dieléctrico

Demostraremos que la polarización ~~(…)~~ es la causante de este aumento de la capacidad:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_s A}{V} = \frac{D \cdot A}{V} = \frac{(\varepsilon_0 E + P) A}{V} \quad (4.9) \rightarrow \frac{\varepsilon_0 \cancel{E} A}{\cancel{E} d} + \frac{PA}{E \cdot d}$$

$\rho_s \rightarrow \vec{D} \cdot \hat{n}_z$

Para un dieléctrico: $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$

Usando la relación $V = E \cdot d$ en (4.9), obtenemos: $C = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d} + \dfrac{PA}{Ed}$ (4.10)

Esto demuestra que la capacidad consta de 2 términos: la asociada a un condensador en el espacio libre, y otra asociada a la polarización:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} + (\varepsilon_r - 1)\frac{\varepsilon_0 A}{d} = C_0 + (\varepsilon_r - 1) C_0 = \varepsilon_r C_0 \quad (4.11)$$

Como sabemos, la presencia de un dieléctrico, puede alterar los valores de $\vec{D}$ y $\vec{E}$ en todos los puntos, por lo que es de esperarse que la energía tb varíe. La ecuación anterior demuestra que un dieléctrico en el interior de un condensador aumenta su capacidad en un factor ε_r. Es importante destacar que un condensador lleno de dieléctrico puede considerarse como dos condensadores en paralelo, uno, un condensador en el espacio libre con capacidad C_0, y el otro con capacidad $(\varepsilon_r - 1) C_0$.

Esto es particularmente útil cuando se consideran condensadores parcialmente llenos, por ejemplo, un condensador medio lleno tendría una capacidad: $C = C_0 + \frac{1}{2}(\varepsilon_r - 1) C_0$

↳ por estar parcialmente lleno

- Condensador a carga constante.

La batería (~~…~~) deposita una cantidad de carga Q_0 en C_0 y luego esta se desconecta del condensador. Cuando se introduce el dieléctrico, las cargas libres de las placas del condensador polarizan el dieléctrico, ~~…~~ lo que conduce a una disminución del campo eléctrico → $V = E \cdot d$ → ↓, a su vez el potencial. Recordemos que $C = \frac{Q}{V}$, y, si la carga permanece constante, la capacidad debe aumentar dado que el potencial disminuye al introducir el dieléctrico.

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{E \cdot d} = \frac{Q_0}{\left(\frac{D}{\varepsilon}\right) \cdot d} = \left.\frac{Q_0}{\frac{\varepsilon_0 E_0 d}{\varepsilon}}\right|_{D = D_0} = \varepsilon_r \cdot \frac{Q_0}{V_0} = \varepsilon_r C_0 \quad (4.12)$$

Donde C_0 es la capacidad en el espacio libre con la batería V_0 conectada.

Hemos tenido en cuenta que $D = D_0 \rightarrow \varepsilon E = \varepsilon_0 E_0$

↳ el campo D es el mismo en el vacío que con el dieléctrico

• Condensador a potencial constante

Al permanecer la batería conectada, el potencial es constante, por lo tanto cuando se introduce el dieléctrico, el voltaje, ahora, en vez de disminuir, debe permanecer constante, por tanto debe añadirse una cantidad adicional de carga, de manera que la nueva capacidad sea $C = \varepsilon_r C_0$, este aumento de carga: $Q = C \cdot V_0 = C \cdot \frac{Q_0}{C_0} = \varepsilon_r Q_0$, (4.13)

este aumento de capacidad tb puede demostrarse:

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\rho_s A}{V_0} = \frac{\varepsilon E A}{V_0} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 E A}{V_0} = \varepsilon_r \cdot \left.\frac{\varepsilon_0 E_0 A}{V_0}\right|_{E=E_0} = \varepsilon_r \frac{Q_0}{V_0} = \varepsilon_r C_0 \quad (4.14)$$

$\rho_s = D =$; $D_0 = \rho_s$

De nuevo demostramos que la capacidad ha aumentado al introducir el dieléctrico.

Destaquemos que los campos eléctricos en el aire y el dieléctrico que llena el condensador son iguales cuando la batería V_0 permanece conectada, es decir, $E_0 = E = \frac{V_0}{d}$, y como $V_0 = cte. \rightarrow Q$ aumenta al introducir el dieléctrico.

• Lo que aumenta la capacidad es la polarización del dieléctrico, ya que la energía almacenada en el condensador: $W = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_r C_0 V^2 = \varepsilon_r W_0$ (4.15)

Acabamos de demostrar que la energía almacenada en un condensador lleno de dieléctrico, aumenta un factor ε_r respecto al condensador en el espacio libre. La energía adicional suministrada por la batería al cargar el condensador lleno del dieléctrico, es la energía necesaria para polarizarlo, de donde la energía de polarización:

$$W_{polarización} = W - W_0 = (\varepsilon_r - 1) W_0 \quad (4.16) \rightarrow \boxed{V cte. \rightarrow \text{aumenta la energía}}$$

W_0 → energía en el vacío

W → energía tras haber introducido el dieléctrico $\equiv E_{TOTAL}$

Al quitar el dieléctrico, $\varepsilon_r \rightarrow 1$, y la energía de polarización tiende a cero (es devuelta al sistema).

→ Carga constante → $C = \varepsilon_r C_0 = \frac{Q_0}{V} \Rightarrow V = \frac{Q_0}{\varepsilon_r C_0} = \frac{V_0}{\varepsilon_r} \Rightarrow W = \frac{1}{2} Q_0 V = \frac{1}{2} Q_0 \frac{V_0}{\varepsilon_r} = \frac{W_0}{\varepsilon_r}$;

$W_{polarización} = \frac{-W_0(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} \rightarrow W_0 = \frac{Q^2}{2C^2}$. La introducción del dieléctrico disminuye la energía total del sistema → la energía necesaria para polarizar el dieléctrico solo puede proceder del sistema (todas las fuentes externas están desconectadas). Como el medio dieléctrico está bajo una fuerza atractiva hacia el condensador, quitando el dieléctrico se reestablecerá la energía de polarización (W_{pol}) al sistema. $\boxed{Q cte. \rightarrow \downarrow \text{la energía}}$

6. Energía de polarización desde el pto. de vista del campo.

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \vec{D}\cdot\vec{E}\,dv = \frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} (\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})\vec{E}\,dv = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \varepsilon_0 E^2 dv}_{\substack{\text{Energía almacenada}\\ \text{en el campo eléctrico}\\ (4.19)}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \vec{P}\cdot\vec{E}\,dv}_{\substack{\text{Energía de polarización}\\ (4.20)}} \rightarrow \quad (4.18)$$

→ Sustituyendo $\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E$:

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 v + \frac{1}{2}(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E^2 v \quad (4.21)$$

- $V=$ cte.

Si suponemos que la batería permanece conectada ($V=$cte.), cuando el medio cambia desde el espacio libre al dieléctrico, el campo eléctrico permanecerá constante, durante y después del cambio, es decir, $E_0 = E = \frac{V}{d}$:

$$W = \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\overset{E_0}{\frac{V}{d}}\right)^2 v}_{W_0} + \frac{1}{2}(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)^2 v \quad (4.22) \Rightarrow W_{polarización} = (\varepsilon_r - 1)W_0 \quad (4.23)$$

- $Q=$ cte.

En el caso de que las fuentes del campo sean fijas ($Q=$cte), la energía de polarización se obtiene de manera similar como $W_{polarización} = -\frac{W_0(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}$;

donde $W_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 v$. Como $\varepsilon_0 E_0 = \varepsilon E$ (el campo es el mismo) $\rightarrow E = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}E_0 = \frac{E_0}{\varepsilon_r} \Rightarrow$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot \frac{E_0^2}{\varepsilon_r^2} + \frac{1}{2}(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\frac{E_0^2}{\varepsilon_r^2}v = \frac{W_0}{\varepsilon_r^2} + W_0\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r^2} = W_0\left(\frac{1}{\varepsilon_r^2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r^2}\right) = \frac{W_0}{\varepsilon_r}$$

la energía ha disminuido

$$\hookrightarrow W_{polarización} = W - W_0 = \frac{W_0}{\varepsilon_r} - W_0 = W_0\left(\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\right) = -W_0\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right) \quad (4.24)$$

7. Fuerza entre las placas de un condensador

Las placas de un condensador cargado se atraen mutuamente debido a sus cargas opuestas, ya que una placa lleva una carga negativa mientras que otra la tiene positiva. Considerando un condensador en el espacio libre como se indica en la figura, debe existir una fuerza mecánica F_m, que equilibre la fuerza eléctrica F_e.

Si se permite que las placas se muevan una pequeña distancia Δx, el trabajo producido por las fuerza eléctrica es: $\Delta W_M = F_x \cdot \Delta x$ (4.25). El objetivo es escribir esta ecuación únicamente en función del capacitor, existen dos posibilidades:

- **Condensador con carga constante**

Cargo el condensador y lo desconecto de la batería, la carga Q en las placas permanece constante cuando se le permite el movimiento, (la batería se encuentre separada del sistema total, y no se afectará por el desplazamiento dx, es decir, el capacitor se encontrará aislado). Considerando por lo tanto un sistema aislado, se observa que si se efectúa cualquier trabajo mecánico por el sistema, W_e (la energía electrostática) debe disminuir. Es decir, los cambios de energía deben equilibrarse:

$$\Delta W_M + \Delta W_e = 0 \quad (4.26) \implies \boxed{F_x = -\left.\frac{\partial W_e}{\partial x}\right|_Q} \quad (4.27)$$

$$\hookrightarrow \Delta W_M = -\Delta W_e \underset{4.25}{=} F_x \cdot \Delta x$$

El signo negativo indica la disminución de la energía almacenada en ese sentido.

→ Para hallar la fuerza atractiva entre las placas, usando la energía almacenada en un condensador: $W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}x$; y derivando respecto a x se obtiene:

$F = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}$. Vemos que la energía es directamente proporcional a x, si x disminuye también lo hará la energía (pasa lo mismo cuando metemos el dieléctrico entre las placas de un condensador). Es decir, la energía almacenada disminuye cuando x disminuye.

- **Condensador con voltaje constante** → la batería es parte del sistema, el capacitor no está aislado

El sistema tiene ahora una fuente ~~(de)~~ externa de energía W_b. Si las placas del condensador plano se permiten mover bajo la influencia de fuerzas eléctricas, el trabajo mecánico que se efectuará, por el sistema y las baterías, viene de nuevo por (4.25), la conservación de la energía en este caso puede expresarse como:

$$\Delta W_e + \Delta W_M = \Delta W_b \quad (4.28)$$

Si las placas se acercan una distancia Δx, la capacidad aumentará:

$$\Delta C = \varepsilon_0 A\left(\frac{1}{x-\Delta x} - \frac{1}{x}\right) = \varepsilon_0 A\frac{\Delta x}{x^2}.$$

como estamos a proceso a V=cte. → la batería debe
→ proporcionar un suministro adicional de carga

Se depositará en C una carga adicional $\Delta Q = (\Delta C)V$. La energía dada en el condensador $\left[W = \frac{1}{2} QV\right]$, aumentará entonces:

$$\Delta W_e = \frac{1}{2}(\Delta Q)V \quad (4.30)$$ → al aumentar la carga, aumentará la energía del condensador

La cantidad de energía suministrada por la batería:

$$\Delta W_b = (\Delta Q)V = V^2 \Delta C = \frac{V^2 \varepsilon_0 A}{x^2} \Delta x \quad (4.31)$$

→ incremento de la energía de la batería. Pues la batería ha movido electrones de la placa + del condensador, a través del V cte., y los ha depositado en la placa negativa:

$$\Delta W_b = 2\Delta W \quad (4.32)$$

La mitad de la energía suministrada por la batería, aparece como un aumento de la energía eléctrica del condensador, la otra mitad se da a la energía mecánica para cambiar la capacidad de ΔC, o en mover las placas más cerca una de la otra, etc. ⟶

$$\boxed{F_x = \left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_V} \quad (4.33)$$

la fuerza tiene el sentido tal que aumenta la energía eléctrica almacenada

→ El cambio de energía en la batería siempre es de signo opuesto al del cambio en el capacitor y de doble magnitud

→ Para hallar la fuerza atractiva entre las placas, podemos usar la expresión de la energía almacenada en un condensador → $W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{x}V^2$, y obtener $F = (-)\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon_0 A}{x^2}V^2$ derivando respecto a x.

↳ la fuerza sobre las placas hace que disminuya la distancia x entre las mismas.

Diferencia entre V=cte. y Q=cte. Cuando V=cte. → la energía almacenada aumenta en el condensador cuando se permite que las placas se acerquen, este aumento de energía: $\Delta W = \frac{1}{2}\Delta C V^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{V^2\varepsilon_0 A}{x^2}\Delta x$. Además, la batería proporciona al campo una cantidad igual de energía $f_m \cdot \Delta x$. En ambos casos, la fuerza es tal que aumenta la capacidad del sistema.

→ Energía electrostática a Q=cte. → depende directamente de la distancia entre placas

→ A V=cte. → la fuerza es tal que aumenta la capacidad del sistema.

8. Los objetos dieléctricos se mueven hacia los campos eléctricos más intensos.

La única forma de explicar que ~~(tas)~~ un dieléctrico se meta en un condensador, es que existan líneas de campo, de forma que estas vayan por fuera del condensador, tal que introduzcan el dieléctrico. Las líneas creadas ~~en~~ al acercarse al condensador son más intensas, estas líneas crean cargas positivas y negativas en el dieléctrico, que arrastra el objeto hacia el condensador.

Este fenómeno atractivo existe independientemente de si el condensador se mantiene a un potencial fijo V (batería permanece conectada) o a carga cte (la batería carga el condensador y después ~~se~~ desconecta.

→ Para un potencial fijo: $W = \frac{1}{2} C V^2 \rightarrow \left[F_x = \left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_V = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x} \right]$ (4.34)

Y actúa en sentido de aumentar la capacidad → el signo ⊕ ya indica que actúa en el sentido de aumentar la energía → un dieléctrico que entra en un condensador, aumenta la energía almacenada

→ Para una carga fija: $W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \longrightarrow \left[F_x = - \left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_Q = \frac{Q^2}{2C^2} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right]$ (4.35) → la fuerza tiene el sentido de aumentar la capacidad.

El signo ⊖ implica que la fuerza tiene el sentido que disminuya la energía almacenada, lo cual ocurre así porque el aumento de C disminuye W, a Q cte.

9. Presión electrostática

Si x es la separación entre las placas, $C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{x}$ (4.36) → capacidad de un condensador plano paralelo; entonces $\frac{dC}{dx} = -\frac{\varepsilon_0 A}{x^2} = -\frac{C}{x} \Rightarrow$

$F_e = \ominus \frac{Q^2}{2Cx} = -\frac{W_e}{x}$ → negativa dado que las placas con cargas opuestas se atraen entre sí.

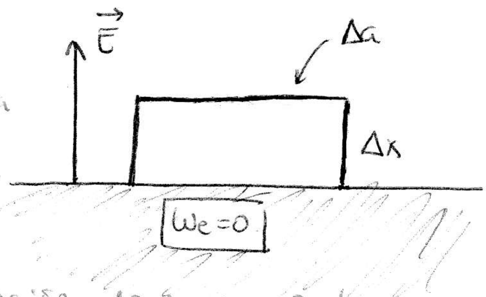
$\longrightarrow F_e = -\frac{W_e}{x} = -\frac{w_e \cdot A \cdot \cancel{x}}{\cancel{x}}$

Usando que $W_e = w_e \cdot V = w_e \cdot A \cdot x \Rightarrow F_e = -w_e \cdot A \Rightarrow \left[f_e = \frac{|F_e|}{A} = w_e \right]$ (4.37) ↳ presión electrostática

$\vec{f_e} = f_e \cdot \hat{n} = w_e \cdot \hat{n}$ ↳ dirección hacia fuera de la superficie conductora

Se ha encontrado que existe una tensión o fuerza hacia afuera por unidad de área sobre la superficie conductora, que es numéricamente igual al valor de la densidad de energía en la superficie.

Aunque este resultado se obtuvo al considerar el caso específico de un capacitor de placas paralelas, se puede demostrar que posee validez general.



Considérese una porción de la superficie conductora. Dentro del conductor, donde $E=0$, w_e tb lo es. Suponga ahora que una porción pequeña de la superficie conductora, de área Δa, recibe un pequeño desplazamiento Δx perpendicular a la superficie. El volumen de la región donde $w_e = 0$ ha sido aumentado $\Delta a \cdot \Delta x$, por lo que la energía total ha cambiado en $\Delta W_e = -w_e \Delta a \cdot \Delta x$, y este cambio de energía corresponde a una fuerza ΔF_e (sobre este elemento de superficie), dado por: $\Delta F_e = -\dfrac{\Delta W_e}{\Delta x} = w_e \cdot \Delta a$ (4.38), dado que ΔF_e es proporcional al área Δa, se puede definir otra vez una fuerza por unidad de área: $\left[f_e = \dfrac{\Delta F_e}{\Delta a} = w_e \right]$ (4.39) → Que coincide con la obtenida para el condensador plano

La presión electrostática puede expresarse en función del campo:

$$\left[f_e = w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{\rho_s^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\rho_s E \right] \quad (4.40)$$

$E^2 = \dfrac{\rho_s^2}{\varepsilon_0^2}$

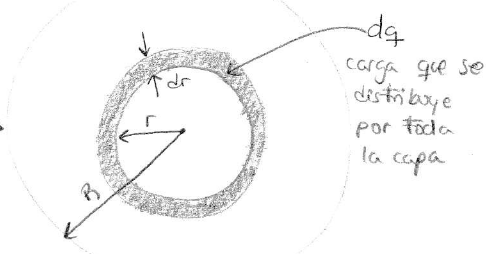
→ donde E y ρ_s deben evaluarse en el pto. particular de la superficie que se esté considerando.

↳ La fuerza total sobre la superficie de un conductor:

$$\left[\vec{F}_{e,\text{TOTAL}} = \int_s f_e \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\int \rho_s^2\, d\vec{s} \right] \quad (4.41)$$

• Diversas cosas aleatorias que dice Paco en clase

→ Energía necesaria para construir una distribución de carga a través de cargas diferenciales (esferas de radio R con densidad volumétrica constante).



Consideramos $\boxed{\rho_v = \text{cte.}}$

Hacemos una esfera por capas

$\boxed{dW = dq \cdot \phi}$ → potencial ; $\phi = \dfrac{Q_r}{4\pi\varepsilon_0 r} = \dfrac{\frac{4}{3}\cancel{\pi} r^3 \rho_v}{4\cancel{\pi}\varepsilon_0 r} = \dfrac{\rho_v r^2}{3\varepsilon_0}$;

→ carga dentro de la de radio r

dvolumen $dV = 4\pi r^2 dr$ → $dQ_r = \rho_v \cdot dV \underset{\rho_v = \text{cte.}}{\int} \rho_v \cdot dV \rightarrow Q_r = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rho_v$ → Análogamente: $Q = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho_v \rightarrow \rho_v = \dfrac{3Q}{4\pi R^3}$

→ $dq = \rho_v dV \underset{\rho_v = \text{cte.}}{\int} \rho_v \cdot 4\pi r^2 \cdot dr$

expresándolo en función de la Q TOTAL → Q

↳ $dW = dq \cdot \phi = \rho_v \cdot 4\pi r^2 \cdot dr \cdot \dfrac{\rho_v r^2}{3\varepsilon_0} = \dfrac{4\pi \rho_v^2 r^4}{3\varepsilon_0} dr \Rightarrow W = \displaystyle\int_0^R dW = \dfrac{4\pi R^5}{15\varepsilon_0}\rho_v^2 \Rightarrow \boxed{W = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}}$

$\boxed{\rho_s = cte.}$

$$W = \frac{1}{2}\int_S V\rho_s\, ds \underset{\rho_s = cte.}{=} \frac{\rho_s}{2}\int V ds = \frac{\rho_s}{2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_S ds = \frac{\rho_s}{2}\cdot\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\cdot 4\pi R^2 = \frac{\rho_s Q R}{2\varepsilon_0} \rightarrow$$

Usando que $\rho_s = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2} \Rightarrow \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \boxed{\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}}$

→ Radio clásico del electrón

↳ igualamos la energía electrostática del electrón con la energía en reposo (mc^2)

$$\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e} = m_e c^2 ; \boxed{r_e = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{m_e c^2}}$$

↳ $\simeq 2,82\cdot 10^{-5}$ m

+ no sé qué del radio de Bohr

+ no se qué de λ

TEMA 5 : MÉTODOS ESPECIALES EN ELECTROSTÁTICA

Hasta ahora se ha encontrado el potencial escalar por integración sobre una distribución dada de cargas fuente $\rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_v \, dv}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$. Sin embargo existen problemas en los que no se puede usar la ecuación anterior directamente (por ejemplo si se conoce solamente la distribución de carga en una región finita del espacio y los valores del potencial en las regiones limitantes de esta). Para estos casos es necesario resolver el problema a través de una ecuación diferencial en derivadas parciales. De las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ll} (5.1) & \nabla \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0} \\ (5.2) & \vec{E}(r) = -\nabla\phi \end{array}\right\} \rightarrow \nabla \cdot \nabla \phi = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0} \ (5.3) \rightarrow \boxed{\nabla^2\phi = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}} \quad (5.4)$$

↳ Ecuación de Poisson

Si las densidades relevantes de carga son iguales a cero, (el segundo miembro es nulo) $\rightarrow \boxed{\nabla^2 \phi = 0}$ (5.5)

↳ Ecuación de Laplace

1. Unicidad de la solución a la ecuación de Laplace

Se demostrará que si se ha encontrado una solución a la ecuación de Laplace que satisface las condiciones de frontera dadas, esta solución es única. El término "condiciones de frontera" se utiliza aquí de una manera diferente, antes se refería al comportamiento de los campos en una superficie de discontinuidad entre dos medios, ahora, tratamos una región rodeada por una superficie para la que el valor numérico del potencial se encuentra dado o conocido en todos los ptos. (no se conocen los detalles de la distribución de cargas fuente fuera de esta región, pero sí se conoce el potencial que ellas producen en la superficie.

Supongamos dos soluciones $\phi_1(\vec{r})$ y $\phi_2(\vec{r})$ que satisfacen las condiciones de frontera dadas. Sea $\phi = \phi_1 - \phi_2$; entonces $\nabla^2\phi = \nabla^2\phi_1 - \nabla^2\phi_2 = 0 \rightarrow$ que implica que ϕ tb es solución de la ecuación de Laplace.

Sobre la superficie limitante S, $\phi_1 = \phi_2$, es decir $\phi = 0$ en la frontera.

Usando la siguiente identidad vectorial: $\nabla(u\vec{A}) = \vec{A}(\nabla u) + u(\nabla\vec{A}) \rightarrow \begin{cases} u = \phi \\ A = \nabla\phi \end{cases}$

$$\nabla(\phi\nabla\phi) = \nabla\phi\,\nabla\phi + \cancel{\phi\nabla^2\phi}^{\,0} = (\nabla\phi)^2$$ Aplicando el Th. de la divergencia:

$$\int_v (\nabla\phi)^2 dv = \int_v \nabla(\phi\nabla\phi)dv = \int_s (\phi\nabla\phi)ds = 0$$

$\hookrightarrow \phi = 0$ en la frontera

Como $(\nabla\phi)^2 > 0$, la integral será nula, solo si el propio integrando es cero en todas partes $\rightarrow (\nabla\phi)^2 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \rightarrow$

Por lo que ϕ = constante. Pero como $\phi = 0$ en la frontera, $\phi = 0$ en todo el espacio, es decir, $\phi_1 = \phi_2$ en toda la región solución.

$\hookrightarrow \phi_1 - \phi_2 = 0$; $\phi_1 = \phi_2$

2. Método de las imágenes

La suma de los potenciales individuales de un conjunto de cargas puntuales, es, automáticamente, una solución de la ecuación de Laplace. Esto constituye la base del método de las imágenes. El objetivo es encontrar un conjunto de cargas ficticias (cargas imagen) las que, junto con cualesquiera cargas reales que se encuentren presentes, harán posibles satisfacer las condiciones de frontera y así obtener la función única del potencial. Es decir, se intenta escribir el potencial como:

$$\left[\phi = \sum_{real} \frac{q_r}{4\pi\varepsilon_0 R_r} + \sum_{imagen} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i}\right] \quad (56)$$

Las cargas imagen simularán de alguna manera el comportamiento de las otras cargas fuente o material presente. Las cargas imagen se situarán fuera de la región para la que se está tratando de calcular ϕ.

→ Millón de ejercicios en el Wangness: pag pdf → 220 (libro 119)

3. Solución a Laplace usando funciones armónicas

Las funciones que verifican la ecuación de Laplace se denominan funciones armónicas. El uso de armónicos consiste en seleccionar una función compatible con la geometría del sistema considerado y ajustar las constantes en función de las condiciones de frontera.

↳ cuadro tabla

TEMA 2 : ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

• Densidad de carga volumétrica $\longrightarrow \rho_V = \dfrac{\Delta q}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta V} = \dfrac{dq}{dV}$

↳ igual con la densidad superficial (ρ_s) y lineal de carga (ρ_ℓ)

↳ para un volumen V $\rightarrow \boxed{q = \int_V \rho_V \, dv}$

$\rightarrow \varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\, F/m$

• Integral de volumen $\rightarrow I = \int_V V(\vec{r})dv \Rightarrow \int_S V(\vec{r})ds \Rightarrow \int_C V(\vec{r})d\ell$

igual con ρ_s y ρ_ℓ

• Postulados básicos $\rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_V}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases}$

$\rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\int \dfrac{\rho_V(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} dv'$

$\rightarrow \vec{E}(P) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{q_i}{|\vec{R}_i|^3} \vec{R}_i$ → creado por N cargas puntuales

• Ley de Gauss $\longrightarrow \boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}}$

$\boxed{\phi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\int_V \dfrac{\rho_V}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dv}$ (distribuciones continuas de carga)

de una carga puntual

• Potencial eléctrico $\rightarrow \boxed{\vec{E} = -\nabla \phi} \rightarrow V \equiv \phi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{Q}{r}$

$\phi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \dfrac{q_k}{|\vec{r}-\vec{r}\,'_k|}$ (conj. de N cargas puntuales)

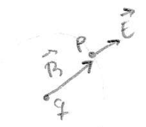
• Ecuación de Poisson $\rightarrow \nabla^2 \phi(\vec{r}) = -\dfrac{\rho_V}{\varepsilon_0}$

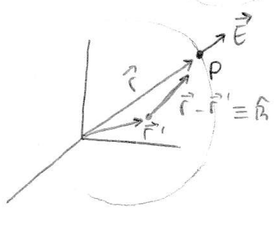
• Ecuación de Laplace $\rightarrow \nabla^2 \phi(\vec{r}) = 0$

• $\boxed{\Delta V_1^2 = V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}$ → Potencial en un pto. $\rightarrow \boxed{\Delta V = \dfrac{W}{q} = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}$

↳ El potencial eléctrico aumenta al ir en contra del campo eléctrico

• Ley de Coulomb ↳ $\begin{cases} \rightarrow \text{carga puntual en el espacio libre} \rightarrow \text{sup. gaussiana esfera de radio } R \rightarrow \vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{R^2} \hat{R} \\ \rightarrow \text{si no está en el origen de coordenadas} \rightarrow \vec{E}_P = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \hat{R} \end{cases}$





• $\begin{cases} \text{Simetría esférica}: \vec{E}(r) = E(r)\hat{r} \\ \text{Simetría cilíndrica}: \vec{E} = E(\rho)\hat{\rho} \\ \text{Simetría planar}: \vec{E} = E(z)\hat{z} \longrightarrow \text{Se cumple que } E(-z) = -E(z) \end{cases}$

TEMA 3: ELECTROSTÁTICA EN MEDIOS MATERIALES

$\to \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$

- **Conductor** → volumen equipotencial
  - → Dentro del conductor → $\vec{E}(\vec{r}) = 0 \longrightarrow Q_{enc} = 0$; $\phi(\vec{r}) = V(\vec{r}) = cte.$
  - → Campo en la superficie → $\vec{E}_n(\vec{r}) \neq 0 \longrightarrow \vec{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\hat{n}$ ← haciendo Gauss; $\vec{E}_t(\vec{r}) = 0$ → si no las cargas se desplazarían paralelamente; $\phi(\vec{r}) = cte.$

- **Dieléctricos en campo electrostático** →
  - → Momento dipolar: $\vec{p} = q \cdot \vec{d}$ (C·m)
  - → Vector polarización: $\vec{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum \vec{p}_k}{\Delta v}$ C/m^2
  - → $\rho_{ps} = \vec{P}\hat{n}$ → densidad superficial de carga de polarización equivalente
  - → Carga que sale fuera del volumen tras la polarización → $Q = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{s}$
  - → $\rho_{pv} = -\nabla \vec{P}$ → densidad volumétrica de carga de polarización equivalente ↳ Si $\vec{P} = cte. \to \rho_{pv} = 0$.
  - → $\rho_v = \nabla(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \nabla \vec{D}$ → Tomando la integral de volumen → $\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{libre\ encerrada}$
  - → $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ — mirar esto
  - → $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{S'} \frac{\rho_s \, ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{V'} \frac{\rho_v \, dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$
  - → $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

- **Componentes tangenciales** → $\vec{E}_{t_1} = \vec{E}_{t_2}$; la componente tangencial de un campo $\vec{E}$ es continua a través de la superficie de separación entre los dos medios con ctes. dieléctricas distintas → El campo se difracta

- **Componentes normales** → $D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$. la componente normal del campo $\vec{D}$ es discontinua a través de una superficie de separación cuando existe una carga superficial → Tp van a ser continuas al estar en medios distintos → El campo se refracta.

- **Capacitancias y condensadores** → → Capacitancia → $C = \frac{Q}{V_{12}}$ (F) → $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\rho_s \cdot ds}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$
  - → En el exterior del condensador el campo es nulo y en el interior su módulo es el doble del campo que crearía una sola de las placas → $E = 2E = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}$
    - ↳ Una placa sola → $E = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}$
  - → Condensadores en paralelo → $C_T = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots$
  - → Condensadores en serie → $\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots$

→ ¿campo cero → potencial cero?
↳ No tiene por qué

→ Campo cero <u>no</u> significa potencial cero.

→ Despreciar efectos de borde → el campo es en todo momento perpendicular a las placas

→ Campos →
- Simetría esférica → $E = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}$, donde $\rho_s = \frac{Q}{A}$ ⇒ $\vec{E} = E(r)\hat{r}$
- Plano infinito → $E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A}$ (aplicando Ley de Gauss)
- Simetría cilíndrica
  ↳ $\vec{E} = E(\rho)\hat{\rho}$

Boletín 1

→ Ejercicio 7 → pq cuando $E(P)=0$ → es así?

→ Cuando tenemos cargas libres → usamos $\vec{D}$

→ Un conductor en equilibrio tiene todas las cargas bajo el mismo potencial

→ $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \rho_s$ ⟹ aplicando condiciones de frontera al conductor se cumple

---

• Boletín 1 →
- → Problemas de esferas →
  ↓
  Simetría esférica
  - Situar cargas correctamente ⟨ esfera descargada? / conectada a potencial? a Tierra?
  - Calcular campos
  - Calcular potenciales
  - Hay alguna conectada a Tierra?
  - Sustituir o obtener el valor de las cargas en función de lo demás
- → Condensadores →
  ↓
  solo ∃ campo dentro
  - Se carga una placa + y otra −
  - Si metes un conductor este tb se carga → calcular campo dentro y obtener la relación de las cargas
  - $\Delta\phi = \int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$
  - Calcular capacidad

• Boletín 2

→ Calcular densidades de polarización →
- Calcular la volumétrica
- Calcular la superficial → evaluando en cada superficie, y en cada pto.
- Q_T polarización $=0$

↳ calcular el campo ⟨ simetría por $\vec{D}$ / $\frac{[Q_P+Q_V]_{enc}}{\varepsilon_0} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s}$

→ Dieléctricos y condensadores →
- Mirar como es el campo en la superficie de separación ⟨ normal → usamos D / tangencial → usamos $\vec{E}$
- Aplicar las condiciones de frontera para el campo correspondiente
- Sacar el vector E mediante → $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$
- Si las placas conductoras están unidas → $\phi = 0$
- Si te pide densidades de carga → calcularlas ⟨ en el conductor / en el dieléctrico

→
- Mirar como es el campo
- Mirar si hay cargas libres
- Aplicar $\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q$ → obtener el campo D

→
- Sacas E y D en cada región (usando la simetría esférica de D)
- Aplicas las condiciones de frontera → sacas $D_1, D_2, E_1, E_2, \ldots$
- Obtienes las densidades de carga con $\hat{n}(D_1 - D_2) = \rho_s$

→ Varios dieléctricos en cilindros o esferas →
- Simetría → campo $\vec{D}$
- Varios dieléctricos →
  - condiciones de frontera ⟩ sacar constantes
  - $\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q$
  - Sacar $\vec{E}$ → capacidad
- Un dieléctrico − campo $\vec{D}$ → $\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q$ → sacar cte. → sacar $\vec{E}$ → sacar C

TEMA 4: ENERGÍA Y FUERZAS ELECTROSTÁTICAS

- Energía electrostática en un sistema de cargas puntuales discretas → $\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r_i})}$

energía almacenada en la configuración del sistema

↳ no tiene en cuenta el trabajo necesario para crear cargas puntuales

trabajo necesario para ubicar las N cargas en sus posiciones finales en el sistema. → puede dar valores negativos

- Energía electrostática almacenada en una distribución continua de carga → $\boxed{W_e = \frac{1}{2}\int_{V,S,\ell} \rho_v \cdot V \cdot dv}$ (J)

↳ incluye las autoenergías

$$W_e = \frac{1}{2}\int \rho_v \cdot \phi \cdot dv = \frac{\phi}{2}\int \rho_v \cdot dv = \frac{1}{2}\phi \cdot Q$$

$\phi = cte.$

en un condensador: $W = \frac{1}{2}\sum Q \cdot V$

- Energía electrostática en términos de cantidades de campo

→ Para un medio general: $\boxed{W_e = \frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \vec{D}\cdot\vec{E}\cdot dv}$ (J)

→ Medio lineal e isótropo: $\boxed{W_e = \frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \varepsilon E^2 \cdot dv} \equiv \boxed{\int_{\text{todo el espacio}} w_e dv}$ → $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$

↳ incluye las autoenergías tb

↳ densidad de carga electrostática

- Energía almacenada en un condensador: $\boxed{W_e = \frac{1}{2}CV^2}$ (J)

- Energía almacenada en la polarización:

↳ cuando se añade un dieléctrico se produce un aumento de la capacidad → $\boxed{C = \varepsilon_r \cdot C_0}$ → se demuestra a $Q = cte.$ / a $V = cte.$

C_0: capacidad en el espacio libre

↳ $\boxed{W = \varepsilon_r \cdot W_0}$ → aumenta en un factor ε_r

W_0: energía en el vacío

→ $\boxed{W_{pol} = W - W_0 = (\varepsilon_r - 1)W_0}$ → $V = cte.$

↳ $\boxed{W_{pol} = \frac{-W_0(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}}$ → $Q = cte.$

- Fuerza entre las placas de un condensador → $Q = cte.$ → $\boxed{F_x = -\left.\frac{\partial W_e}{\partial x}\right|_Q} = \frac{Q^2}{2C^2}\cdot\frac{\partial C}{\partial x}$

↳ $V = cte.$ → $\boxed{F_x = +\left.\frac{\partial W_e}{\partial x}\right|_V} = \frac{1}{2}V^2\cdot\frac{\partial C}{\partial x}$

→ Condensador plano paralelo → $\boxed{C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}}$

→ Condensador cilíndrico → $\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}\cdot L}$

- Presión electrostática

Th. de Earnshaw

A partir del corolario del th. del valor medio ("El potencial eléctrico no puede alcanzar máximos ni mínimos en las regiones libres de carga (regiones donde satisface la ecuación de Laplace), con lo cual los máximos y mínimos estarán localizados necesariamente en las regiones donde reside la carga eléctrica").

↳ Establece que una carga puntual en presencia de un campo eléctrico no puede mantenerse en equilibrio estable cuando solamente está sometida a fuerzas electrostáticas, a menos que esté situada en un pto. ocupado por otras cargas.

La condición de equilibrio estable se traduce en que al desplazar la carga del pto., la fuerza que produce el campo tiende a devolverlo a él (E_p mín). Esto equivale a decir que el campo entorno a este pto. va siempre hacia dentro para una carga positiva y hacia afuera para una negativa, es decir, el potencial eléctrico es máximo para el caso de la carga positiva o mínimo para la negativa. Según lo anterior el potencial adquiere valores extremos únicamente en los ptos. donde residen cargas, lo que nos lleva a la conclusión de que ningún sistema se encuentra en equilibrio estable bajo la acción de sus propias fuerzas eléctricas.

↳ Para que una carga puntual se encuentre en equilibrio estable en presencia de otras cargas y en un lugar distinto al que ocupan estas cargas. Es preciso que sobre la carga puntual actúen fuerzas distintas a las fuerzas electrostáticas.